libro abierto / serie matemágicas

José Luis Tábara Carbajo

Geometría simpléctica

1.0.0

$$\begin{tikzcd}
T(\mathcal{V}) \arrow[rr, "\mathsf{p}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T^*(\mathcal{V}) \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

▷ Un libro libre de Alqua

GS	GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA	535.13	ALQ

† lomo para ediciones impresas

Dedicado

A todos los amantes de la geometría diferencial http://alqua.org/libredoc/GS

José Luis Tábara Carbajo jltabara@wanadoo.es http://alqua.org/people/jltabara

Geometría simpléctica

versión 1.0.0
23 de noviembre de 2003

alqua,madeincommunity

copyleft

Serie matemágicas

Área geometría diferencial

CDU 535.13

Editores

Álvaro Tejero Cantero alvaro@alqua.org

Notas de producción

Plantilla `latex-book-es-b.tex, v. 0.1` (C) Álvaro Tejero Cantero.

▷compuesto con software libre◁

Índice general

1. Geometría simpléctica lineal

Supondremos siempre que el cuerpo k sobre el que trabajamos es de característica distinta de 2. Todos los k-espacios vectoriales que aparezcan se supondrán de dimensión finita, aunque una parte de la teoría es válida para espacios arbitrarios.

1.1. Geometrías

Definición 1.1 *Una k-*geometría simpléctica *es un par (E, Ω_2) formado por un k-espacio vectorial E y una 2-forma Ω_2 sobre E. Ω_2 también se llama* producto escalar *o* métrica.

La forma Ω_2 es una aplicación bilineal de $E \times E$ en k. Como Ω_2 es antisimétrico tenemos que $\Omega_2(e, f) = -\Omega_2(f, e)$. En particular, como la característica no es 2, se deduce que $\Omega_2(e, e) = 0$.

Dada una base $\{e_i\}$ podemos asociar a cada geometría una matriz cuadrada cuyo orden coincide con la dimensión de la geometría. Sus elementos se definen como

$$\omega_{ij} = \Omega_2(e_i, e_j)$$

Si denotamos por $\{\alpha_i\}$ a la base dual de $\{e_i\}$ entonces se puede expresar

$$\Omega_2 = w_{ij}\, \alpha_i \wedge \alpha_j \text{ (convenio de sumación)}$$

Observación.

En general, en todos los libros, se denomina geometría simpléctica a lo que nosotros llamaremos geometría simpléctica no singular. Nosotros también haremos esto cuando introduzcamos el concepto de geometría no singular (ver sección 1.2).

Ejemplos.

- Consideramos en k^2 la base canónica y denotamos por ω_x y ω_y la base dual. Entonces $\Omega_2 = \omega_x \wedge \omega_y$ dota a k^2 de una estructura simpléctica.
- Sea k^{2n} dotado de la base canónica y $\{\omega_i\}$ la base dual. Si tomamos $\Omega_2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{n+i}$ tenemos una estructura simpléctica.
- Sea E un espacio vectorial arbitrario. Sobre el espacio $E \oplus E^*$ tenemos la 2-forma canónica definida como

$$\Omega_2(e \oplus \omega, e' \oplus \omega') = \omega'(e) - \omega(e')$$

- Sea E un espacio vectorial real dotado de una métrica euclídea. El producto escalar de dos vectores lo denotaremos $g(x, y)$. En el espacio vectorial $E \times E$ existe una estructura simpléctica asociada a este producto escalar, que se define como

$$\Omega_2(e_1 \oplus e_2, e'_1 \oplus e'_2) = g(e'_2, e_1) - g(e'_1, e_2)$$

- Sea E un espacio vectorial complejo dotado de una métrica hermítica no degenerada. Consideraremos también la estructura natural de espacio vectorial real. Si denotamos por $\langle e, f \rangle$ al producto hermítico de dos vectores, tenemos que la aplicación es lineal en la primera componente, antilineal en la segunda y además se cumple que $\langle e, f \rangle = \overline{\langle f, e \rangle}$ y $\langle e, e \rangle > 0$ si $e \neq 0$.

  La parte imaginaria de la métrica hermítica, $\mathrm{Im}(\langle e, f \rangle)$, es una métrica simpléctica sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial E.

Definición 1.2 *Sean $(E, \Omega_2), (E', \Omega'_2)$ dos k-geometrías simplécticas. Un* morfismo simpléctico*, o* morfismo métrico*, de E en E' es una aplicación lineal $\varphi : E \to E'$ que verifica*

$$\Omega_2(e, f) = \Omega'_2(\varphi(e), \varphi(f)) \text{ para todo } e, f \in E$$

La composición de dos morfismos simplécticos es otro morfismo simpléctico. Asimismo, si φ es un isomorfismo simpléctico, φ^{-1} es también simpléctico. Los isomorfismo simplécticos se denominan también simplectomorfismos, o transformaciones canónicas.

Tenemos las siguientes propiedades que se derivan directamente de las definiciones dadas.

- $\varphi : E \to E'$ es un morfismo métrico si y solo si $\varphi^*(\Omega'_2) = \Omega_2$, donde φ^* denota la imagen inversa[1].
- Dos geometrías son isométricas si existe alguna isometría entre ellas. Esto nos da una relación de equivalencia en el conjunto de geometrías sobre el cuerpo k. Para nosotros dos geometrías isométricas serán consideradas la misma geometría.
- Si E, E' son isométricas, existen bases en E y E' tales que Ω_2 y Ω'_2 tienen la misma matriz asociada. Si φ es la isometría y tomamos una base $\{e_i\}$ en el primer espacio, tenemos que $\{\varphi(e_i)\}$ es una base del segundo espacio y las matrices respecto de dichas bases son iguales. El recíproco también es cierto.
- El problema que pretendemos estudiar en este capítulo es la clasificación de las geometrías de acuerdo a la relación de equivalencia dada por la isometría. Ello exige dar condiciones necesarias y suficientes para que dos geometrías sean isométricas y también encontrar los representantes más sencillos de cada clase de equivalencia (expresando la métrica en una base).

[1] Si $\varphi : E \to E'$ es una aplicación lineal, la imagen inversa es una aplicación lineal $\varphi^* : \bigwedge(E') \to \bigwedge(E)$ que sobre una p-forma α actua como

$$\varphi^*(\alpha)(e_1, \cdots, e_p) = \alpha(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_p))$$

- Dos geometrías isométricas son necesariamente de la misma dimensión. Por lo tanto la dimensión es un invariante en el problema de clasificación de geometrías.

- Si (E, Ω_2) es una geometría, el conjunto de isometrías, junto con la composición de aplicaciones, es un grupo, que es de modo natural un subgrupo del grupo lineal. De acuerdo a la idea de Klein, el estudio de la geometría E es el estudio de los invariantes por el grupo antes citado, que de ahora en adelante llamaremos grupo simpléctico y denotaremos $\mathrm{Sp}(E)$.

- Si dos geometrías son isométricas mediante una isometría $\varphi : E \to E'$, los grupos $\mathrm{Sp}(E)$ y $\mathrm{Sp}(E')$ son isomorfos. En efecto, asociando a cada isometría T de E la isometría $\varphi \cdot T \cdot \varphi^{-1}$, construimos un morfismo de grupos que se comprueba fácilmente que establece un isomorfismo entre los grupos simplécticos de ambas geometrías.

Definición 1.3 *Dos vectores $e, f \in E$ son* ortogonales *si $\Omega_2(e, f) = 0$.*

La relación de ser ortogonales posee las propiedades reflexiva y simétrica, más no es una relación de equivalencia pues no posee la propiedad transitiva. Todo vector es ortogonal a si mismo por ser Ω_2 antisimétrica (y $\mathrm{car}(k) \neq 2$). Por eso se dice que los vectores son isótropos en geometría simpléctica.

Definición 1.4 *Sea $V \subset E$ un subespacio. Llamamos* ortogonal *de V y denotamos $V^\perp$ al subespacio*

$$V^\perp = \{e \in E \text{ tales que } \Omega_2(e, f) = 0 \text{ para todo } f \in V\}$$

Definición 1.5 *Sean (E, Ω_2) y (E', Ω_2') dos geometrías. La* suma ortogonal *es el espacio vectorial $E \oplus E'$ dotado de la métrica*

$$\Omega_{E \oplus E'}(e + e', f + f') = \Omega_2(e, f) + \Omega_2'(e', f')$$

La suma ortogonal se denota $E \perp E'$.

- Si π_1 y π_2 denotan las proyecciones de $E \oplus E'$ en cada factor, π_1 y π_2 son morfismos métricos. Tenemos la fórmula

$$\Omega_{E \oplus E'} = \pi_1^*(\Omega_2) + \pi_2^*(\Omega_2')$$

  La métrica $\Omega_{E \oplus E'}$ se denota $\Omega_2 + \Omega_2'$, o también $\Omega_2 \perp \Omega_2'$, cometiendo un abuso de notación fácilmente entendible.

- Todo vector de E, tras inyectarlo en $E \perp E'$ es ortogonal a todo vector de E'.

- Decimos que dos subespacios V y V' son ortogonales si todo vector de V es ortogonal a todo vector de V'. Denotamos este hecho por $V \perp V'$. El subespacio $V^\perp$ es el mayor de los subespacios ortogonales a F.

1.2. Polaridad

Definición 1.6 *La* polaridad *es la aplicación lineal* $\mathsf{p} : E \to E^*$ *definida por*

$$\mathsf{p}(e) = i_e \Omega_2$$

Si existe riesgo de confusión la denotaremos p_{Ω_2} o p_E. En algunos libros se define la polaridad con el signo cambiado. Este cambio de signo no tiene consecuencias en nuestro estudio.

Definición 1.7 *El* radical *de la geometría* (E, Ω_2) *es el núcleo de la polaridad asociada. Se denota* $\operatorname{rad}(E)$ *o* $\operatorname{rad}(\Omega_2)$.

- El radical está constituido por los vectores ortogonales a todo vector. Se tiene por tanto que $\operatorname{rad}(E) = E^\perp$.
- Una métrica es no singular si su radical es nulo. En este caso la polaridad es un isomorfismo, puesto que estamos suponiendo que el espacio vectorial es de dimensión finita.
- Dada una métrica no singular, si $\Omega_2(e, f) = 0$ para todo elemento $e \in E$, necesariamente $f = 0$. Si la métrica es degenerada si existen vectores f no nulos que cumplen $\Omega_2(e, f) = 0$.
- Si $\operatorname{rad}(E) = E$, la métrica Ω_2 es nula y (E, Ω_2) se dice que es un geometría isótropa.
- El rango de (E, Ω_2) es la dimensión de la imagen de la polaridad. Aplicando una fórmula bien conocida tenemos que

$$\operatorname{rang}(E) = \dim(E) - \dim(\operatorname{rad}(E))$$

Nota.

A partir de ahora llamaremos geometría simpléctica a las geometrías no singulares.

1.3. Restricción de métricas

Sea $V \subset E$ un subespacio, Ω_2 una métrica en E e $i : V \to E$ la inyección canónica. Sobre V consideramos la métrica $i^*\Omega_2 = (\Omega_2)_{|V}$. El par $(V, (\Omega_2)_{|V})$ es una geometría, denominada restricción de Ω_2 a V. Para no complicar la notación, denotaremos por Ω_2 a la métrica restringida a un subespacio.

La inyección canónica es un morfismo métrico. La restricción de Ω_2 a V es la única estructura que hace que la inyección canónica sea un morfismo métrico.

Llamamos rango de un subespacio V al rango de la geometría (V, Ω_2).

Proposición 1.1 *Se verifica la fórmula*

$$\mathrm{rad}(V) = V \cap V^{\perp}$$

Demostración.

Si $e \in \mathrm{rad}(V) \Rightarrow e \in V$ y además $\Omega_2(e, f) = 0$ para todo $f \in V$. Entonces $e \in V^{\perp}$.
Si $e \in V \cap V^{\perp}$ entonces $\Omega_2(e, f) = 0$ para todo $f \in E$, entonces $e \in \mathrm{rad}(V)$. □

La geometría inducida en V es no singular si y solo si $V \cap V^{\perp} = 0$.

1.4. Proyección de métricas

Sea $\pi : E \to E'$ una aplicación lineal epiyectiva. E está dotado de una métrica Ω_2. Decimos que la geometría E es proyectable[2] (o reducible) por el epimorfismo π, si existe sobre E' una métrica Ω'_2, que hace que π sea un morfismo métrico.

Tenemos que $E' = E/\operatorname{Ker}(\pi)$. La única definición posible para Ω'_2 es la que cumple

$$\Omega'_2(\pi(e), \pi(f)) = \Omega_2(e, f)$$

Esto será correcto siempre y cuando la definición no dependa de los representantes elegidos. Ello se soluciona en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *La geometría (E, Ω_2) es proyectable por un epimorfismo π si y solo si $\operatorname{Ker}(\pi) \subset \mathrm{rad}(E)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Otro representante de $\pi(e)$ es de la forma $e + u$, con $u \in \operatorname{Ker}(\pi)$

$$\Omega_2(e + u, f + u') = \Omega_2(e, f) + \Omega_2(u, f) + \Omega_2(e, u') + \Omega_2(u, u')$$

pero los tres últimos sumandos son nulos puesto que $\operatorname{Ker}(\pi) \subset \mathrm{rad}(E)$ y concluimos que la definición es independiente de los representantes.

$\Leftarrow$) $e \in \operatorname{Ker}(\pi) \Rightarrow \Omega_2(e, f) = \Omega'_2(\pi(e), \pi(f)) = \Omega'_2(0, \pi(f)) = 0$. Por lo tanto $e \in \mathrm{rad}(E)$. □

Tenemos que dada una métrica arbitraria, Ω_2 se proyecta en una métrica irreducible mediante la proyección canónica $\pi : E \to E/\mathrm{rad}(E)$. La métrica no singular sobre la que se proyecta es única salvo isometrías. Esto nos permite dar una interpretación geométrica del rango. El rango de una geometría es la dimensión del espacio donde se proyecta de modo irreducible.

Ejemplo.

Consideremos un subespacio $V \subset E$ con la métrica inducida. El radical de la métrica inducida es $V \cap V^{\perp}$. Si el espacio cociente $V/(V \cap V^{\perp})$ es no nulo, podemos proyectar la métrica de V sobre él y la métrica es no degenerada.

[2] Una geometría (E, Ω_2) es proyectable mediante π en una geometría (E', Ω'_2) si y solo si $\pi^*\Omega'_2 = \Omega_2$

1.5. Clasificación de geometrías

Vamos a pasar ya al teorema de clasificación y a la construcción de las formas normales.

Lema 1.3 *Si $\varphi : E \to E'$ es una isometría, $\varphi(\mathrm{rad}(E)) = \mathrm{rad}(E')$. El rango de una métrica es invariante por isometrías.*

Lema 1.4 *Si $\varphi : E \to E'$ es una isometría, el morfismo inducido*

$$\varphi' : E/\,\mathrm{rad}(E) \to E'/\,\mathrm{rad}(E')$$

es una isometría.

Proposición 1.5 *Sean $(E, \Omega_2), (E', \Omega_2')$ dos geometrías de la misma dimensión. E y E' son isométricas si y solo si lo son $E/\,\mathrm{rad}(E)$ y $E'/\,\mathrm{rad}(E')$.*

Demostración.

Sea W un suplementario de $\mathrm{rad}(E)$. La proyección canónica $\pi : E \to E/\,\mathrm{rad}(E)$ induce una isometría de W con $E/\,\mathrm{rad}(E)$. Es claro que la suma directa $\mathrm{rad}(E) \oplus W$ es también ortogonal. Hacemos lo mismo con la geometría E'.

Sea φ_2 es una isometría de W con W' y φ_1 un isomorfismo (y por tanto isometría) de $\mathrm{rad}(E)$ en $\mathrm{rad}(E')$. Entonces $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ es una isometría, donde φ está definido como

$$\varphi(e \oplus f) = \varphi_1(e) \oplus \varphi_2(f) \text{ con } e \in \mathrm{rad}(E), f \in W$$

lo que demuestra que las geometrías E y E' son isométricas si lo son sus partes irreducibles. $\square$

Esta proposición reduce la clasificación de una geometría arbitraria a la clasificación de una geometría no singular. Vamos a clasificar estas últimas.

Definición 1.8 *Llamamos* plano hiperbólico *a una geometría bidimensional no singular. Decimos que un geometría o un espacio es* hiperbólico *si es isométrico a una suma ortogonal de planos hiperbólicos.*

Teorema 1.6 *Si E es no singular, entonces es hiperbólica.*

Demostración.

Veamos primero que toda geometría no singular debe contener a un plano hiperbólico.

Dado un vector no nulo $e \in E$, existe otro vector f tal que $\Omega_2(e, f) \neq 0$. Entonces $\pi =< e, f >$ es un plano hiperbólico (compruébese).

Si π es un plano hiperbólico tenemos que $E = \pi \perp \pi^{\perp}$ y la geometría en $\pi^{\perp}$ es también no singular. Mediante un argumento inductivo y teniendo en cuenta que estamos en el caso de dimensión finita, concluimos que E es un suma ortogonal de planos hiperbólicos. $\square$

Definición 1.9 *Dos vectores e, f forman una* pareja hiperbólica *si*

$$\Omega_2(e, f) = 1$$

Un plano es hiperbólico si y solo si posee parejas hiperbólicas (problema 10). De este modo dos planos hiperbólicos siempre son isométricos, pues una isometría se construye mandando una pareja hiperbólica a otra pareja hiperbólica. Del mismo modo, dos espacios hiperbólicos son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión.

Teorema 1.7 (de clasificación) *Dos geometrías simplécticas, E, E' son isométricas si y solo si* $\dim(E) = \dim(E')$ *y* $\operatorname{rang}(E) = \operatorname{rang}(E')$.

Demostración.

Se tiene la descomposición $E = \operatorname{rad}(E) \perp E/\operatorname{rad}(E)$.

Las partes isótropas son isométricas si tienen la misma dimensión. Las partes no singulares, como son hiperbólicas, son también isométricas si tienen la misma dimensión.
□

1.6. Formas normales

Dada una geometría arbitraria E tenemos la siguiente descomposición

$$E = \operatorname{rad}(E) \perp \pi_1 \cdots \perp \pi_n$$

Tomando una base cualquiera del radical y tomando un cada plano hiperbólico una base formada por una pareja hiperbólica obtenemos una base

$$\{e_1, \ldots, e_p, e_{1a}, e_{1b}, \ldots, e_{na}, e_{nb}\}$$

del espacio total. La matriz de Ω_2 en esta base es de la forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0_p & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \pi & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right)$$

donde 0_p es la matriz nula de dimensión p y π es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Reordenando la base anterior podemos afirmar que dada una geometría simpléctica, existe una base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ tal que Ω_2 se expresa en función de la base dual en la forma

$$\Omega_2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{n+i}$$

con $n = (\dim(E) - \operatorname{rang}(E))/2$.

En esta base la matriz de Ω_2 es

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline 0 & -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

donde Id_n designa la matriz unidad de dimensión n. Esta es la llamada forma normal de Ω_2.

En toda geometría simpléctica no singular existe una base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ tal que $\Omega_2 = \omega_i \wedge \omega_{n+i}$ (convenio de sumación). La base mencionada se llama base canónica asociada a Ω_2 y no es única.

Otras veces emplearemos la notación $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ para referirnos a la base simpléctica. Esta notación proviene de la mecánica clásica. En esta base se cumplen las identidades

$$\Omega_2(p_i, p_j) = 0 = \Omega_2(q_i, q_j) \qquad \Omega_2(p_i, q_j) = \delta_{ij}$$

1.7. Subespacios

En toda esta sección la métrica sobre E es no singular, aunque dicha métrica restringida a algunos subespacios que consideraremos si posee radical.

Lema 1.8 *Si $V \subset E$ es un subespacio, entonces $V^\perp = \mathsf{p}^{-1}(V^0)$. En particular* $\dim(V^\perp) = \dim(V^0)$.

Demostración.

Sea $e \in V^\perp$ y $f \in V$. Entonces $i_e\Omega_2(f) = \Omega_2(e, f) = 0$ y la forma lineal $i_e\Omega_2$ se anula sobre V. De esta forma $i_e\Omega_2 \in V^0$.

Recíprocamente, si $\alpha \in V^0$ necesariamente $\alpha = i_e\Omega_2$ por ser la métrica no degenerada. Tomamos $f \in V$. Como α es incidente con V se tiene

$$0 = \alpha(f) = i_e\Omega_2(f) = \Omega_2(e, f)$$

y el elemento $e \in V^\perp$. □

Corolario 1.9 *Si la métrica es no degenerada $(V^\perp)^\perp = V$.*

Demostración.

Si $e \in V$ y $f \in V^\perp$, tenemos que $\Omega_2(e, f) = 0$. De este modo e está incluido en el ortogonal a $V^\perp$. Como V y $(V^\perp)^\perp$ tienen la misma dimensión necesariamente coinciden. □

Definición 1.10 *Dado un subespacio V de E:*

- *Es* no singular *o* simpléctico *si la métrica restringida a V es no singular.*
- *Es* isótropo *si la métrica restringida al subespacio es nula.*
- *Es* coisótropo *si $V^\perp$ es isótropo.*
- *Es* lagrangiano *si es a la vez isótropo y coisótropo.*

Debemos tener en cuenta que hay subespacios que no son de ninguno de los cuatro tipos enunciados.

Recordando que $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^\perp$ podemos dar otras definiciones, tal vez más operativas, de los conceptos anteriores.

Definición 1.11 *Dado un subespacio V de E tenemos:*

- *V es* isótropo *si $V \subset V^\perp$.*
- *V es* coisótropo *si $V^\perp \subset V$.*
- *V es* simpléctico *si $V \cap V^\perp = 0$.*
- *V es* lagrangiano *si $V = V^\perp$.*

Ejemplos.

- Un subespacio V es simpléctico si y solo si $V^\perp$ es también simpléctico, puesto que $(V^\perp)^\perp = V$.
- Sea V arbitrario. El subespacio $V \cap V^\perp$ siempre es isótropo. Su ortogonal, que coincide con $V + V^\perp$, es siempre coisótropo. Todo subespacio de dimensión uno es isótropo. Todo hiperplano es coisótropo.
- Si V es isótropo necesariamente $\dim(V) \leq n$ siendo $2n$ la dimensión del espacio total. Esto es consecuencia de que $V \subset V^\perp$ y de que además $\dim(V) + \dim(V^\perp) = 2n$.
- Del mismo modo, si V es coisótropo su dimensión es mayor o igual que n.
- Si L es lagrangiano, es a la vez isótropo y coisótropo. Por los ejemplos anteriores su dimensión es necesariamente n.
- Los subespacios lagrangianos son isótropos y no pueden existir subespacios isótropos que los contengan. Los subespacios lagrangianos son subespacios isótropos maximales.

- Sea V un subespacio isótropo. Si la inclusión $V \subset V^\perp$ es estricta, existe un elemento no nulo $e \in \mathcal{V}^\perp - V$. Entonces $V \oplus \langle e \rangle$ es un subespacio isótropo de dimensión estrictamente mayor. Todo subespacio isótropo está contenido en un subespacio isótropo maximal, que es necesariamente lagrangiano.

- Consideremos el espacio $E \times E^*$ con la métrica canónica. Tanto E como E^* son subespacios lagrangianos.

Dada una base canónica $\{q_i, p_i\}$ es fácil comprobar que $\langle q_1, \dots, q_s \rangle$ con $s \leq n$ es un subespacio isótropo. Si en el caso anterior $s = n$ el subespacio es lagrangiano. Los subespacios de la forma $\langle q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s \rangle$ son simplécticos. En realidad este es el caso general. Si tomamos una base de un subespacio isótropo se puede completar para obtener una base simpléctica y lo mismo en los otros casos.

Proposición 1.10 *Sea $V \subset E$ un subespacio simpléctico. Dada una base simpléctica en V se puede completar para obtener una base simpléctica del espacio total.*

Demostración.

Construimos $V^\perp$ y tomamos una base simpléctica de este subespacio. La unión de las bases de V y de $V^\perp$ da una base simpléctica en E. $\square$

Proposición 1.11 *Dada una base de un subespacio isótropo se puede completar para obtener una base simpléctica.*

Demostración.

Sea $V_1 = \{q_1, \dots, q_s\}$ una base de un subespacio isótropo. Necesariamente s es menor o igual que n. Introducimos el subespacio $V_2 = \langle p_2, \dots, p_s \rangle$. Como $V_2 \subset V_1$ tenemos la inclusión $V_2^\perp \subset V_1^\perp$. Tomamos un vector p_1 que pertenezca a $V_2^\perp - V_1^\perp$, normalizado de tal manera que $\Omega_2(q_1, p_1) = 1$. Siguiendo con este proceso podemos incluir V_1 en un subespacio nodegenerado y se concluye por la proposición anterior. $\square$

1.8. Subespacios lagrangianos

Proposición 1.12 *Sea E un espacio vectorial. Son equivalentes:*

- *V es un subespacio lagrangiano.*

- *$V = V^\perp$.*

- *V es isótropo y $\dim(V) = \frac{1}{2}\dim(E)$.*

Demostración.

Algebra lineal elemental. □

Cualquiera de las condiciones anteriores sirve para definir un subespacio lagrangiano.

Proposición 1.13 *Sea E una geometría simpléctica y L un subespacio lagrangiano. Existe un isomorfismo simpléctico de E con $L \times L^*$.*

Demostración.

Sea L' un suplementario de L. Entonces $E = L \oplus L'$. Definimos una aplicación de ese suplementario en L^*

$$\varphi : L' \to L^* \text{ donde } \varphi(e')(e) = \Omega_2(e, e')$$

La aplicación es un isomorfismo, puesto que si $\varphi(e') = 0$ tenemos que $\Omega_2(e', e) = 0$ para todo elemento de L'. Pero como L es isótropo tenemos que $\Omega_2(e', e) = 0$ para todo elemento de E. Como las dimensiones coinciden, la aplicación es un isomorfismo.

Puede comprobar el lector que la aplicación $\phi = \mathrm{Id} \oplus \varphi$ es un morfismo simpléctico y por lo tanto E es isomorformo a $L \times L^*$. □

Si tenemos dos espacios simplécticos E y E', sobre su producto cartesiano definimos la métrica

$$\Omega_2 \ominus \Omega_2' = \pi^*(\Omega_2) - (\pi')^*(\Omega_2')$$

Esto dota de estructura simpléctica al espacio vectorial $E \times E'$.

Si $\varphi : E \to E'$ es una aplicación lineal (o en general cualquier función) su gráfico es el subconjunto de $E \times E'$

$$\Gamma_\varphi = \{(e, \varphi(e)) \text{ donde } e \in E\}$$

Proposición 1.14 *Un isomorfismo $\varphi : E \to E'$ es simpléctico si y solo si su gráfico Γ_φ es un subespacio lagrangiano de $E \ominus E'$.*

Demostración.

Si el gráfico es lagrangiano tenemos

$$(\Omega_2 \ominus \Omega_2')((e, \varphi(e)), (f, \varphi(f)) = 0$$

pero esta fórmula se traduce en

$$\Omega_2(e, f) - \Omega_2'(\varphi(e), \varphi(f)) = 0$$

que es sinónimo de que φ sea métrico. □

Esto nos permite introducir la

Definición 1.12 *Llamamos* relación canónica lineal *a cualquier subespacio lagrangiano de $E \ominus E'$.*

1.9. El grupo simpléctico como grupo de Lie

Dada una geometría (E, Ω_2), todo endomorfismo que conserva la forma simpléctica (φ conserva la forma simpléctica si $\varphi^*(\Omega_2) = \Omega_2$), conserva también el elemento de volumen canónico. El endomorfismo tiene entonces determinante unidad y es necesariamente un isomorfismo. El conjunto de los isomorfismos que conservan la métrica forman el grupo simpléctico de E, que hemos denotado $\mathrm{Sp}(E)$.

Sea $\{q_i, p_i\}$ una base canónica y φ un simplectomorfismo. Las imágenes de los elementos de dicha base verifican las relaciones que nos sirven para definir una base canónica. Un simplectomorfismo transforma bases canónicas en bases canónicas. Recíprocamente si un morfismo transforma una base canónica en otra base canónica necesariamente es un isomorfismo y conserva la forma simpléctica.

Proposición 1.15 *Sean Ω_2 y Ω_2' dos formas simplécticas sobre un mismo espacio vectorial. Existe un isomorfismo φ que cumple $\varphi^*(\Omega_2) = \Omega_2'$.*

Demostración.

Construimos una base canónica para Ω_2 y otra base canónica para Ω_2'. La aplicación lineal que transforma la primera base en la segunda es un isomorfismo y cumple el enunciado. □

Corolario 1.16 *Todo grupo simpléctico es isomorfo al grupo simpléctico del espacio $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de su estructura simpléctica estándar.*

Dado un espacio vectorial E, denotaremos por $\Omega(E)$ al conjunto de todas las formas simplécticas que se pueden definir sobre E. Este conjunto está contenido en el conjunto de formas de grado 2 sobre E que es un espacio vectorial. Dada una base de E, las formas de segundo grado se identifican con el conjunto de matrices antisimétricas. Una matriz o una forma es no degenerada si y solo si su determinante (dada una base) es no nulo. Esta condición nos dice que $\Omega(E)$ es un abierto de un espacio vectorial y tiene una estructura diferenciable canónica.

Proposición 1.17 *Se tiene la igualdad*

$$\Omega(E) = \mathrm{Gl}(E)/Sp(E)$$

Demostración.

Definimos una acción del grupo lineal en el conjunto $\Omega(E)$ mediante

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(E) \times \Omega(E) & \longrightarrow & \Omega(E) \\ (\varphi, \omega) & \longrightarrow & \varphi^*(\omega) \end{array}$$

Esta acción es transitiva por el corolario anterior. El grupo de isotropía de un elemento ω consiste en los isomorfismo que cumplen $\varphi^*(\omega) = \omega$ que es precisamente el grupo simpléctico asociado a ω. Como los grupos simplécticos asociados a dos formas distintas son isomorfos podemos denotar dicho grupo por $\mathrm{Sp}(E)$. $\square$

Vamos a dar una interpretación matricial del grupo $Sp(E)$. Recordemos que por J denotamos la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una endomorfismo $\varphi : E \to E$ designamos su matriz respecto a una base por la matriz A. Si φ es una isometría se cumple

$$\Omega_2(e, e') = \Omega_2(\varphi(e), \varphi(e'))$$

que traducido a ecuaciones matriciales nos la fórmula

$$AJA^t = J$$

El grupo simpléctico se puede definir matricialmente como el conjunto de matrices cuadradas de orden $2n$ que cumple la ecuación anterior.

Como todos los grupos simplécticos de los espacios de dimensión $2n$ son isomorfos, se acostumbra a denotar el grupo simpléctico como $\mathrm{Sp}(2n)$, donde $2n$ es la dimensión del espacio.

Proposición 1.18 $\mathrm{Sp}(E)$ *es un grupo de Lie.*

Demostración.

El grupo simpléctico es un subgrupo del grupo lineal. En la interpretación matricial del grupo simpléctico se observa que el conjunto $\mathrm{Sp}(E)$ se obtiene igualando a constantes funciones diferenciables. Por lo tanto $\mathrm{Sp}(E)$ es un cerrado y además es subgrupo. Aplicando el teorema del subgrupo cerrado de Cartan concluimos que el grupo simpléctico es un grupo de Lie. $\square$

En el problema 15 se calcula el álgebra de Lie de este grupo y en el 17 se dan algunas propiedades grupales.

1.10. Estructura compleja

Si E es un espacio vectorial complejo, el endomorfismo que consiste en multiplicar por la unidad imaginaria cumple que su cuadrado es igual al opuesto de la identidad. La generalización de este hecho nos da la

Definición 1.13 *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una* estructura compleja *en E es un endomorfismo $J : E \to E$ que cumple $J^2 = -\mathrm{Id}$.*

Aplicando el determinante a la expresión $J^2 = -\operatorname{Id}$ obtenemos que

$$\det(J)^2 = (-1)^{\dim(E)}$$

lo que prueba que todo espacio con una estructura compleja tiene dimensión par.

El ejemplo más elemental de estructura compleja lo proporciona el conjunto $\mathbb{C}^n$ entendido como espacio vectorial sobre los reales. En $\mathbb{C}^n$ definimos $J(e) = ie$. Identificando $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ la matriz de J es

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id}_n \\ \operatorname{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Todo espacio con una estructura compleja se puede dotar de una estructura de espacio vectorial complejo. Para ello definimos el siguiente producto por elementos de $\mathbb{C}$

$$(a + ib) \cdot e = a \cdot e + b \cdot J(e)$$

Esto vuelve a demostrar que si un espacio posee una estructura compleja, necesariamente es de dimensión par como espacio vectorial real.

Proposición 1.19 *Sea E un espacio vectorial real de dimensión $2n$ y J una estructura compleja. Existen n vectores $\{e_i\}$ tales que $\{e_i, J(e_i)\}$ forman una base de E.*

Demostración.

Con ayuda del endomorfismo J se puede dotar a E de una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n. Sea $\{e_i\}$ una base del espacio vectorial complejo. Entonces los vectores $\{e_i, J(e_i)\}$ forman una base del espacio vectorial real. □

Mediante $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$ y $\operatorname{Gl}_{\mathbb{C}}(E)$ denotamos el conjunto de endomorfismo e isomorfismos de E con su estructura compleja. Todo endomorfismo complejo es a la vez un endomorfismo real. Para que un endomorfismo real sea complejo, basta que "saque" fuera la unidad imaginaria.

Proposición 1.20 *Un endomorfismo φ real es complejo si y solo si φ conmuta con J.*

Demostración.

Si φ es una aplicación lineal compleja, verifica $\varphi(ie) = i\varphi(e)$. Esta condición equivale a $\varphi J = J\varphi$.

Si φ y J conmutan, entonces $\varphi(ie) = i\varphi(e)$ para todo vector $e \in E$. Dado $z = a + bi$ entonces

$$\varphi(ze) = \varphi(ae + ibe) = a\varphi(e) + ib\varphi(e) = z\varphi(e)$$

y φ es aplicación lineal compleja. □

Corolario 1.21 *Se tiene la fórmula*

$$\operatorname{Gl}_{\mathbb{C}}(E) = \{\varphi \in \operatorname{Gl}(E) \text{ tales que } [J, \varphi] = 0\}$$

Matricialmente podemos suponer que J viene dada por la matriz J_0. Escribiendo en bloques de tamaño $n \times n$ la matriz de φ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

lo que implica que la matriz de φ es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

A pesar de que sobre un mismo espacio vectorial pueden existir muchas estructuras complejas, todas son equivalentes en el siguiente sentido.

Corolario 1.22 *Sean J_0 y J_1 dos estructuras complejas sobre un mismo espacio vectorial real. Existe un isomorfismo real que transforma J_0 en J_1.*

Demostración.

El endomorfismo J_0 transforma a E en un espacio vectorial complejo de dimensión n, siendo $2n$ la dimensión del espacio real. Lo mismo sucede con J_1. Como dos espacios vectoriales complejos de la misma dimensión son isomorfos, existe un isomorfismo $\varphi : E \to E$ entre ambas estructuras complejas. Este isomorfismo es una aplicación lineal compleja (y por lo tanto real) y verifica la igualdad $\varphi(ie) = i\varphi(e)$. Teniendo en cuenta que una multiplicación por i deriva de J_0 y otra de J_1, se cumple $\varphi(J_0(e)) = J_1\varphi(e)$, lo que implica $\varphi J_0 = J_1\varphi$. El endomorfismo φ transforma una estructura compleja en la otra. $\square$

Esta proposición se puede trasladar a un lenguaje matricial. Si A es la matriz de φ, se cumple $A^{-1}J_0A = J_1$.

Corolario 1.23 *Todo espacio vectorial real E dotado de una estructura compleja es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de su estructura compleja estandard.*

Denotemos por $J(E)$ el conjunto de todas las estructuras complejas de E. Este conjunto adquiere una estructura topológica por ser un subconjunto de $\mathrm{End}(E)$.

Proposición 1.24 *El conjunto de estructuras complejas $J(E)$ se identifica con $\mathrm{GL}(E)/\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(E)$.*

Demostración.

Podemos considerar que el espacio vectorial es $\mathbb{R}^{2n}$ y trabajar en la base estandard. Definimos una acción de $\mathrm{Gl}(E)$ en el espacio $J(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2n}) \times J(\mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & J(\mathbb{R}^{2n}) \\ (\varphi, J) & \longrightarrow & \varphi^{-1}J\varphi \end{array}$$

Los resultados anteriores nos dice que la acción es transitiva. Consideramos una estructura compleja, por ejemplo la estandard, y calculamos su grupo de isotropía. Los elementos del grupo de isotropía son exactamente aquellos isomorfismos que conmutan con J y por lo tanto son elementos del grupo $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2n})$. □

Como el grupo lineal real tiene dos componentes conexas (las dos orientaciones), el espacio cociente también tiene dos componentes conexas.

1.11. Estructuras complejas compatibles

En un espacio vectorial pueden existir muchas estructuras complejas. A nosotros nos interesan las que estén de algún modo relacionadas con la estructura simpléctica.

Definición 1.14 *Sea (E, Ω_2) un espacio simpléctico. Una estructura compleja J es* compatible *con la estructura simpléctica, si J es un isomorfismo simpléctico.*

Un espacio vectorial simpléctico puede admitir muchas estructuras complejas compatibles. La unicidad no puede ser demostrada, pero si su existencia.

Proposición 1.25 *Todo espacio simpléctico no singular sobre los reales admite una estructura compleja compatible.*

Demostración.

Sea $\{q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n\}$ una base canónica. Definimos $J : E \to E$ mediante su actuación sobre la base

$$J(q_i) = p_i, \quad J(p_i) = -q_i$$

J es un isomorfismo y cumple $J^2 = -\mathrm{Id}$ pues esta ecuación es válida para todos los elementos de la base.

La base $\{J(p_i), J(q_i)\}$ es también base canónica y J es un isomorfismo simpléctico. □

El problema de esta construcción es que claramente depende de la base tomada. Sin embargo se pueden construir estructuras complejas siguiendo otros métodos.

Sea E un espacio vectorial simpléctico y g una métrica euclídea arbitraria. Con ayuda de g vamos a construir una estructura compleja J.

Como g es euclídea, existe un único operador lineal A que cumple la identidad

$$g(A(e), f) = \Omega_2(e, f)$$

para todo par de vectores. Calculemos el adjunto de A.

$$g(A^*(e), f) = g(e, A(f)) = g(A(f), e) = \Omega_2(f, e) = g(-A(e), f)$$

Tenemos que $A^* = -A$. Si A cumple $A^2 = -\mathrm{Id}$ hemos terminado. En caso contrario le aplicamos a A la descomposición polar que pasamos a describir.

Podemos escribir, de modo único, $A = RJ$ donde R es un operador autoadjunto definido positivo y J es ortogonal. Calculamos el adjunto de la descomposición polar

$$-A = A^* = J^* R^* = J^{-1} R$$

por ser R autoadjunto y J ortogonal. Deducimos que $R = -JA$ y por otra parte ya sabíamos que $R =$

1.12. Estructura compleja y producto escalar

Un espacio simpléctico y con estructura compleja, posee una forma bilineal simétrica asociada.

Proposición 1.26 *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} g: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (e, f) & \longrightarrow & \Omega_2(e, J(f)) \end{array}$$

es una forma bilineal simétrica.

La forma simétrica g depende tanto de la estructura simpléctica como de la estructura compleja. Cualquier cambio en alguna de ellas, implica un cambio en g.

Propiedades.

- La aplicación g es no degenerada, debido a que J es un isomorfismo. Con ayuda de g podemos definir una aplicación de E en su dual, que llamaremos polaridad asociada a g. Se define como $p_g(e) = i_e g$.
- El endomorfismo J es una isometría respecto al producto escalar g.
- En general esta forma tiene signatura, pero todo espacio simpléctico tiene una estructura compleja compatible que hace que g sea un producto euclídeo. En realidad la estructura que hemos construido en la proposición 1.25 da lugar a una estructura euclídea.

Como hemos visto, a partir de Ω_2 y de J podemos construir g. En general conociendo un par de datos de la terna (Ω_2, J, g) podemos reconstruir la estructura desconocida.

Proposición 1.27 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

- $g(e, f) = \Omega_2(e, J(f))$.
- $\Omega_2(e, f) = -g(e, J(f))$.
- $J = -{p_{\Omega_2}}^{-1} p_g$.

Demostración.

La primera es justamente la definición de g. Para probar la segunda basta utilizar que J es una isometría

$$\Omega_2(e,f) = \Omega_2(J(e),J(f)) = g(J(e),f) = g(J^2(e),J(f)) = -g(e,J(f))$$

El operador $-{p_{\Omega_2}}^{-1}p_g$ cumple

$$\Omega_2(-{p_{\Omega_2}}^{-1}p_g(e),f) = -p_{\Omega_2}({p_{\Omega_2}}^{-1}p_g(e))(f) = -p_g(e)(f) = -g(e,f)$$

que también lo verifica el operador J. Como la métrica es no degenerada ambos operadores deben coincidir. □

Hemos visto en la sección 1.1 que todo espacio hermítico tiene asociado una métrica simpléctica. Es la parte imaginaria del producto hermítico. En realidad este ejemplo engloba a todos los casos, pues toda estructura simpléctica es en realidad la parte imaginaria de una estructura hermítica (salvo un signo).

Sea J una estructura compleja de tal forma que g sea un producto euclídeo. El producto escalar hermítico sobre un espacio simpléctico se define como

$$\langle\, e, f\,\rangle = g(e,f) - i\Omega_2(e,f)$$

Las condiciones que definen un producto hermítico se verifican fácilmente. Además la metrica es definida positiva por ser g euclídeo. Si el producto escalar g tiene signatura, el producto hermítico tiene también la misma signatura.

Problemas

1 Sea (E,Ω_2) una geometría y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base. La matriz de Ω_2 en la base dada es la matriz cuadrada que tiene por componentes

$$\omega_{ij} = \Omega_2(e_i,e_j)$$

Esta matriz es antisimétrica.

2 Una matriz antisimétrica en dimensión impar tiene necesariamente determinante nulo.

3 Dada una geometría (E,Ω_2) construimos otra geometría sobre el mismo espacio vectorial. Dicha geometría la denotaremos por Ω_2^t y diremos que es la traspuesta de Ω_2. Se define por la fórmula

$$\Omega_2^t(e,f) = \Omega_2(f,e)$$

Relacionar las matrices de Ω_2 y de Ω_2^t construidas sobre una misma base.

4 Sea (E, J) una estructura compleja. Un subespacio real V que cumpla $J(V) \subset V$ es también un subespacio complejo. Si V es un subespacio complejo, entonces es un subespacio real y cumple que $J(V) \subset V$.

5 Sea $\{e_i\}$ una base de E y sea $\{\alpha_i\}$ la base dual, definida por las relaciones $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$. La matriz de la polaridad entre la base $\{e_i\}$ y su dual coindice con la matriz de Ω_2 en la base $\{e_i\}$.

6 Si el espacio es de dimensión finita, son equivalentes:

- La polaridad es inyectiva.
- La polaridad es un isomorfismo.
- La matriz de Ω_2 en una base es no singular.

7 Sea (E, Ω_2) una geometría no singular de dimensión $2n$.

- Si denotamos $(\Omega_2)^n = \Omega_2 \wedge \overset{n)}{\cdots} \wedge \Omega_2$, probar que Ω_2^n es un elemento de volumen.
- Encontrar la expresión de $(\Omega_2)^n$ en función de la base canónica. Esto explica que normalmente se tome como elemento de volumen de una variedad simpléctica

$$\omega_n = \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} \cdot (\omega_2)^n$$

- Probar que toda isometría conserva el elemento de volumen. Concluir que toda isometría tiene determinante unidad. Esta es una versión reducida del teorema de Lioville de la mecánica clásica.

8 Dada una geometría singular, sea r el mayor número tal que $(\Omega_2)^r \neq 0$. Ver la relación de dicho número con el rango de la geometría.

9 Si la geometría es no singular, demostrar las afirmaciones:

- $(V^\perp)^\perp = V$.
- $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$.
- $V^\perp \cap V'^\perp = (V + V')^\perp$.
- $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$.

10 Un plano es hiperbólico si y solo si posee un pareja hiperbólica. Todos los planos hiperbólicos son isométricos.

11 Demostrar que todo espacio vectorial sobre un cuerpo k de dimensión par admite una estructura simpléctica no singular.

12 Sean Ω_2 y Ω_2' dos métricas no singulares sobre un mismo espacio vectorial E. Demostrar que existe un automorfismo $\varphi : E \to E$ que cumple $\varphi^*(\Omega_2) = \Omega_2'$. Así, las estructuras simplécticas sobre un espacio vectorial son únicas salvo isomorfismos.

13 Sea $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ una base simpléctica.

- Demostrar que $V =< q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k >$ es un subespacio no singular. Todo subespacio no singular se puede obtener de este modo, eligiendo convenientemente la base simpléctica.
- $V =< p_1, \dots, p_k >$ y $V' =< q_1, \dots, q_k >$ son subespacios isótropos.
- $V =< p_1, \dots, p_n >$ y $V' =< q_1, \dots, q_n >$ son subespacios lagrangianos.
- Demostrar que toda geometría es isomorfa a la suma directa de dos subespacios lagrangianos. Probar que toda geometría simpléctica es isomorfa a $E \times E^*$ donde E es un subespacio lagrangiano.

14 Matricialmente el producto de dos vectores, en una base canónica, se calcula con la fórmula

$$\Omega_2(e, f) = e^t \cdot J \cdot f$$

15 Sea (E, Ω_2) una geometría no singular. Un endomorfismo $\varphi : E \to E$ es infinitesimalmente simpléctico si cumple

$$\Omega_2(\varphi(e), e') = \Omega_2(e, \varphi(e'))$$

Denotamos por $\mathfrak{sp}(E)$ al conjunto de todos los endomorfismos infinitesimalmente simplécticos de la geometría.

- $\mathfrak{sp}(E)$ es una subálgebra de Lie de $\mathrm{End}(E)$.
- Matricialmente este subálgebra es

$$\mathfrak{sp}(E) = \{u \in \mathrm{End}(E) \text{ tales que } u^t J + J u = 0\}$$

- Un endomorfismo $T \in \mathfrak{sp}(E)$ si y solo si $e^T \in \mathrm{Sp}(E)$.
- $\mathfrak{sp}(E)$ es el álgebra de Lie del grupo simpléctico.
- Si escribimos la matriz en forma de bloques de tamaño n

$$u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

  demostrar que $D = -A^t$ y que C y D son simétricas.
- Encontrar la dimensión del álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n)$.

16 Sea E un k-espacio vectorial dotado de una métrica simétrica y no degenerada. Denotamos por $\langle e, e' \rangle$ a dicho producto escalar. La polaridad asociada a este producto escalar establece un isomorfismo de E con su dual E^*.

- Demostrar que sobre $E \times E$ existe un estructura de espacio simpléctico dada por la fórmula
$$\Omega_2((e_1, e_2), (f_1, f_2)) = \langle\, f_2, e_1 \,\rangle - \langle\, f_1, e_2 \,\rangle$$
- Relacionar la estructura construida con la estructura canónica que tiene el espacio $E \times E^*$.

17 El grupo simpléctico actua de modo transitivo sobre el conjunto $E - \{0\}$.

- Demostrar que dados dos vectores e, f no nulos, existe un isomorfismo simpléctico φ que cumple
$$\varphi(e) = f$$
- Dados dos subespacios isótropos de la misma dimensión, demostrar que existe un isomorfismo simpléctico que transforma uno en el otro.
- Demostrar lo mismo para otro tipo de subespacios.

18 Son ciertas las afirmaciones:

- V es no singular si y solo si $V \cap V^\perp = 0$. Entonces $E = V \oplus V^\perp$.
- V es no singular si y solo si $V^\perp$ es no singular.
- V es isótropo si y solo si $V \subset V^\perp$. Su dimensión siempre es menor o igual que la mitad de la dimensión de la geometría.
- V es lagrangiano si y solo si es isótropo y su dimensión es la mitad de la dimensión de la geometría.

19 Tomando como analogía la composición de isomorfismos simplécticos definir la composición de relaciones canónicas lineales.

2. Variedades simplécticas

2.1. Definición

El estudio axiomático de la mecánica, en su forma hamiltoniana, se realiza dentro del marco de la geometría simpléctica. La geometría simpléctica es la globalización de la geometría simpléctica lineal.

De ahora en adelante $\mathcal{V}$ será una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Definición 2.1 *Una* forma simpléctica *sobre $\mathcal{V}$ es una 2-forma ω_2 definida sobre $\mathcal{V}$ y que cumple:*

a) *Es cerrada, $d\omega_2 = 0$.*

b) *No degenerada en ningún punto. Ello quiere decir que $(\omega_2)_x$ es una métrica sin radical sobre el espacio tangente $T_x(\mathcal{V})$ para todo punto x.*

Si una variedad posee una forma simpléctica necesariamente su dimensión es par.

Como ω_2 es cerrada, es localmente exacta. En un entorno de cada punto existe una forma diferencial de grado uno, θ, que cumple $d\theta = \omega_2$. Decimos que θ es un potencial simpléctico de ω_2. Los potenciales simplécticos no son únicos: si a un potencial simpléctico le sumamos una diferencial exacta sigue siendo un potencial simpléctico.

$$d(\theta + df) = d(\theta) + d^2 f) = \omega_2$$

Definición 2.2 *Una* variedad simpléctica *es un par $(\mathcal{V}, \omega_2)$ formado por una variedad $\mathcal{V}$ y una forma simpléctica ω_2.*

Ejemplos.

- Todo espacio vectorial simpléctico sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es una variedad simpléctica. Esta forma diferencial es cerrada pues es constante en las coordenadas lineales del espacio vectorial.

- Todo abierto de una variedad simpléctica es una variedad simpléctica con la forma restringida.

- Si $\mathcal{V}$ tiene dimensión 2 una forma simpléctica es lo mismo que un elemento de volumen. Toda superficie orientable es también una variedad simpléctica. Sin embargo una superficie no orientable no puede admitir una estructura simpléctica.

- La forma de grado $2n$, $(\omega_2)^n$ es un elemento de volumen en $\mathcal{V}$. Toda variedad simpléctica es orientable y tiene una orientación canónica.
- Sean $(\mathcal{V}, \omega_2)$ y $(\mathcal{V}', \omega_2')$ dos variedades simplécticas. La forma de segundo grado $\pi^*(\omega_2) - \pi'^*(\omega_2')$ es una forma simpléctica en el producto de variedades $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$. Normalmente escribiremos la forma simpléctica como $\omega_2 - \omega_2'$.
- El fibrado cotangente de cualquier variedad tiene una estructura simpléctica estandard. La construcción se realiza en el capítulo 3.

2.2. Transformaciones canónicas

Asociados a la estructura de variedad simpléctica existen unas aplicaciones llamadas morfismos simplécticos o transformaciones canónicas. Esta última notación proviene de la mecánica clásica.

Definición 2.3 *Sean $(\mathcal{V}, \omega_2)$ y $(\mathcal{V}', \omega_2')$ dos variedades simplécticas. Un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ es una* transformación canónica *si*

$$\varphi^*(\omega_2') = \omega_2$$

La composición de dos transformaciones canónicas es otra transformación canónica. Si φ es una transformación canónica, la aplicación inversa φ^{-1} es también una transformación canónica. Estas propiedades se derivan fácilmente de las propiedades de la imagen inversa:

- $(\varphi \cdot \phi)^* = \phi^* \cdot \varphi^*$
- $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$
- $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$

Definición 2.4 *Llamaremos* grupo simpléctico *de la variedad $(\mathcal{V}, \omega_2)$ al conjunto de todas las transformaciones canónicas de la variedad. Lo denotamos $\mathrm{Sp}(\mathcal{V})$.*

Sea φ una aplicación diferenciable, no necesariamente un difeomorfismo, que cumpla $\varphi(\omega_2') = \omega_2$. Como conserva la forma simpléctica, también conserva el volumen y por lo tanto su determinante en todos los puntos debe ser 1. Haciendo uso del teorema de la función inversa hemos demostrado

Corolario 2.1 *Toda aplicación diferenciable que conserve la forma simpléctica es un difeomorfismo local.*

Las aplicaciones φ que cumplen $\varphi(\omega_2') = \omega_2$ se llaman transformaciones canónicas locales, puesto que restringidas a un entorno son difeomorfismos. Las transformaciones canónicas locales no son más que las transformaciones canónicas entre abiertos de la variedad.

El resultado de la proposición 1.14 se puede generalizar a variedades simplécticas, siendo la demostración practicamente similar.

Definición 2.5 *Una subvariedad $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ es lagrangiana si el espacio tangente $T_x(\mathcal{W})$ es un subespacio lagrangiano de $T_x(\mathcal{V})$ para todo $x \in \mathcal{W}$.*

Proposición 2.2 *Sean $(\mathcal{V}, \omega_2)$ y $(\mathcal{V}', \omega_2')$ dos variedades simplécticas. Un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ es una transformación canónica si y solo su gráfico es una subvariedad lagrangiana.*

Demostración.

En el $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ consideramos la forma $\omega_2 - \omega_2'$. El gráfico de φ

$$\mathrm{Gr}(\varphi) = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \text{ tales que } x_2 = \varphi(x_1)\}$$

es una subvariedad isomorfa a $\mathcal{V}$. Sea $x = (x_1, x_2)$ un punto de la variedad. Su espacio tangente a esta variedad es precisamente

$$T_x(\mathrm{Gr}(\varphi)) = \{(e, e') \in T_x(\mathcal{V} \times \mathcal{V}') \text{ tales que } e' = \varphi_*(e)\}$$

Si φ es simplectomorfismo, la aplicación tangente en todo punto es un morfismo simpléctico. El espacio tangente a la subvariedad es un subespacio lagrangiano y la subvariedad es lagrangiana.

Recíprocamente, si la subvariedad es lagrangiana, la aplicación tangente en todo punto es un morfismo simpléctico. Como por hipótesis φ es difeomorfismo, esto implica que φ es una transformación canónica. □

Corolario 2.3 *Una aplicación diferenciable es una transformación canónica local si y solo si su gráfica es una subvariedad lagrangiana del producto.*

2.3. Coordenadas canónicas

Definición 2.6 *Sea $(\mathcal{V}, \omega_2)$ una variedad simpléctica, $\{x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ coordenadas locales en un cierto abierto U. Se dice que estas coordenadas son* canónicas *si*

$$\omega_2 = d\xi_i \wedge dx_i$$

en el abierto en cuestión.

Estas coordenadas son muy cómodas, pues es ellas la forma simpléctica tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema, que no se demostrará, es útil para estudiar localmente las variedades simplécticas.

Teorema 2.4 (de Darboux) *Sea $(\mathcal{V}, \omega_2)$ una variedad simpléctica. Cada punto $x \in \mathcal{V}$ tiene un entorno U_x donde se pueden introducir unas coordenadas canónicas.*

- La condición $d\omega_2 = 0$ es crucial para que exista este sistema de coordenadas. Podemos considerar esta condición como el análogo a la anulación del tensor de curvatura de una métrica simétrica, ya que una métrica riemanniana se puede reducir en un entorno a su forma normal si y solo si su tensor de curvatura se anula.

- Siempre que tengamos que efectuar cálculos de tipo local, podemos suponer coordenadas canónicas. Sin embargo esto no es válido globalmente.

- Sea T^2 el toro. $T^2 = S^1 \times S^1$. Por lo tanto T^2 es orientable por ser producto de orientables. El elemento de volumen dota al toro de una estructura simpléctica. Esta variedad es compacta y como tal no puede admitir un sistema global de coordenadas. Esto demuestra la imposibilidad de un teorema de Darboux global.

2.4. Polaridad

Dada una variedad diferenciable cualquiera $\mathcal{V}$ denotamos por $\mathrm{Der}(\mathcal{V})$ al conjunto de todos los campos diferenciables sobre $\mathcal{V}$. Según sea necesario, entenderemos los campos como derivaciones del anillo de funciones o como secciones del fibrado tangente (dar un vector tangente en cada punto).

Denotamos por $\bigwedge^1(\mathcal{V})$ el conjunto de 1-formas diferenciables sobre la variedad.

Definición 2.7 *Llamamos* polaridad *de la geometría simpléctica $(\mathcal{V}, \omega_2)$ a la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{p}: & \mathrm{Der}(\mathcal{V}) & \rightarrow & \bigwedge^1(\mathcal{V}) \\ & X & \rightarrow & i_X\omega_2 \end{array}$$

Proposición 2.5 *La polaridad es un isomorfismo.*

Demostración.

En cada punto $x \in \mathcal{V}$ la polaridad de la métrica $(\omega_2)_x$ es un isomorfismo puesto que la métrica es no degenerada en todo punto. Como punto a punto la aplicación es un isomorfismo, globalmente también lo es. □

Como los dos espacios son isomorfos, la estructura de álgebra de Lie que poseen los campos se traslada a la formas diferenciales de grado uno.

$$[\mathsf{p}(X), \mathsf{p}(Y)] = \mathsf{p}[X, Y]$$

Sin embargo, y por razones históricas, la operación entre las formas se denomina paréntesis de Poisson y no paréntesis de Lie. Además se emplea otra notación. Un estudio más detallado del paréntesis de Poisson se realiza en el capítulo 4.

Si tenemos una 1-forma α, el campo que le corresponde mediante la polaridad lo denotamos X_α. Dada una función diferenciable $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V})$ su diferencial df es una 1-forma. A esta 1-forma le corresponde mediante la polaridad un campo vectorial que denotamos X_f en vez de X_{df}. El campo que hemos construido se llama campo hamiltoniano. La función f se llama hamiltoniano del campo. El hamiltoniano de un camo no es único y en las variedades conexas está indeterminado en una constante.

Esta construcción del campo hamiltoniano tiene su análogo en geometría riemanniana en la construcción del gradiente de una función. Recordamos que dada una métrica riemanniana g (o semi-riemanniana) existe una polaridad

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{p}: & \mathrm{Der}(\mathcal{V}) & \to & \bigwedge^1(\mathcal{V}) \\ & X & \to & i_X g \end{array}$$

El gradiente se define entonces como $\mathrm{grad}(f) = \mathsf{p}^{-1}(df)$.

Volvamos de nuevo a la geometría simpléctica.

Proposición 2.6 *Se cumple*

$$\mathsf{p}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -d\xi_i, \quad \mathsf{p}(\frac{\partial}{\partial \xi_i}) = dx_i$$

Demostración.

Utilizando que la contracción interior con un campo es una antiderivación obtenemos

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\sum d\xi_i \wedge dx_i) = \sum i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} d\xi_i \wedge dx_i - d\xi_i \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} dx_i = -d\xi_i$$

Y análogamente con el otro campo. □

Leyendo esta proposición en el otro sentido tenemos

$$p^{-1}(d\xi_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad p^{-1}(dx_i) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Corolario 2.7 *En coordenadas canónicas el campo X_f se expresa como*

$$X_f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

El sistema dinámico al que da lugar tiene como ecuaciones

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial f}{\partial \xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

que son llamadas ecuaciones de Hamilton.

Demostración.

Tenemos que

$$X_f = \mathsf{p}^{-1}(df) = \mathsf{p}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f}{\partial \xi_i}d\xi_i\right)$$

lo que prueba nuestra afirmación. □

Corolario 2.8 *En coordenadas canónicas, el campo X_f se calcula mediante el producto matricial*

$$X_f = J \cdot df$$

2.5. Campos localmente hamiltonianos

Otro concepto de interés en mecánica, son los grupos uniparamétricos $\{\tau_t\}$ formados por transformaciones canónicas. Es sabido que esto es equivalente a que $X^L\omega_2 = 0$ siendo X el generador infinitesimal del grupo en cuestión.

Ello nos conduce a la siguiente definición.

Definición 2.8 *Una* transformación canónica infinitesimal *o* campo localmente hamiltoniano *es un campo X que cumple*

$$X^L\omega_2 = 0$$

Los campos localmente hamiltonianos también se llaman simplecticos.

Aplicando la fórmula $[X,Y]^L = [X^L, Y^L]$ demostramos que los campos localmente hamiltonianos forman una subálgebra de lie del conjunto de todos los campos diferenciables de la variedad. Este álgebra es de dimensión infinita como prueba la

Proposición 2.9 *Todo campo hamiltoniano es localmente hamiltoniano.*

Demostración.

Teniendo en cuenta la fórmula de Cartan para la derivada de Lie

$$X^L = i_X\, d + d\, i_X$$

obtenemos que

$$(X_f)^L(\omega_2) = i_{X_f}d(\omega_2) + di_{X_f}(\omega_2) = 0 + d(df) = 0$$

pues el primer sumando es nulo por ser la forma simpléctica cerrada. □

Corolario 2.10 *Un campo X es localmente hamiltoniano si y solo si $i_X\omega_2$ es una forma diferencial cerrada.*

Los campos localmente hamiltonianos no tienen que generar grupos uniparamétricos globales, pero en el caso que lo generen (por ejemplo si la variedad es compacta) tiene que ocurrir que cada τ_t sea una transformación canónica. Si solo genera un grupo local, los elementos del grupo serán transformaciones canónicas, pero de tipo local.

Ejemplos.

- Sea f una función de soporte compacto sobre una variedad simpléctica. Tanto df como X_f son también de soporte compacto. El campo hamiltoniano X_f genera un grupo uniparamétrico global.
- Sean X e Y dos campos localmente hamiltonianos. El campo $[X,Y]$ es hamiltoniano. Para comprobarlo aplicamos la fórmula

$$i_{[X,Y]} = [X^L, i_Y]$$

válida en todo el álgebra exterior.

$$i_{[X,Y]}\omega_2 = X^L i_Y \omega_2 - i_Y X^L \omega_2 = d i_X i_Y \omega_2 = d(\omega_2(X,Y)$$

donde también hemos empleado la fórmula de Cartan $X^L = i_X d + d i_X$.

Problemas

20 Toda transformación canónica conserva el elemento de volumen y la orientación. Su jacobiano debe ser 1 en todo punto.

21 Probar la existencia de transformaciones canónicas locales utilizando el teorema de Darboux.

22 Sea ω_2 una 2-forma cerrada sobre una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión $2n$. Entonces ω_2 es simpléctica si y solo si $(\omega_2)^n$ es un elemento de volumen no nulo.

23 Sea X un campo localmente hamiltoniano. Demostrar que todo punto tiene un entorno donde el campo X es hamiltoniano.

24 Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial simpléctico o un entorno dotado de coordenadas canónicas. Denotamos $z_j = x_j + i\xi_j$. Con esta notación las ecuaciones de Hamilton se escriben

$$\dot{z}_j = -2i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$$

donde hemos denotado

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)/2$$

25 El conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de la forma $(x^2+y^2+1)dx \wedge dy$ es una variedad simpléctica. Calcular el campo hamiltoniano de una función f en las coordenadas standard de $\mathbb{R}^2$.

26 Consideremos el espacio $\mathbb{C}^n$ con coordenadas $(z_1, \dots, z_n)$.

- La forma
  $$\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$$
  es una forma simpléctica.
- Si $z_k = x_k + iy_k$, expresar dicha forma en las coordenadas reales.

27 Sea S^2 la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de los vectores de norma unidad. El espacio tangente en un punto $x \in S^2$ está contenido en $\mathbb{R}^3$ y es precisamente el espacio ortogonal a x. A cada punto $x \in S^2$ le asociamos la forma

$$\omega_x(e, f) = g(x, e \times f)$$

donde g denota la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y $\times$ el producto vectorial asociado.

- En todos los puntos ω_x es no degenerada.
- La forma ω es diferenciable.
- La forma ω es cerrada.

28 Dos k-formas diferenciales α y α' son cohomólogas si existe otra forma μ que cumple $\alpha - \alpha' = d\mu$. Sean ω_2 y ω_2' dos formas simplécticas en una variedad $\mathcal{V}$.

- Todo punto $x \in \mathcal{V}$ posee un entorno donde dichas formas son cohomólogas. Por lo tanto, localmente, es cierta la fórmula
  $$\omega_2 - \omega_2' = d\mu \text{ donde } \mu \text{ es una forma de grado 1}$$
- Si el primer grupo de cohomología de de Rham es nulo, cualquier par de formas simplécticas son cohomólogas.

3. Espacio de fases

3.1. Construcción

El siguiente ejemplo de variedad simpléctica es el que motivó el estudio general de estas entidades. Tiene interés en si mismo, pues es el marco donde se describe la mecánica clásica no relativista con un número finito de grados de libertad.

Asociada a toda variedad $\mathcal{V}$ existe otra variedad de dimensión doble que la de partida. En esta variedad de dimensión par existe una estructura simpléctica natural.

La nueva variedad que construiremos, es conocida por los matemáticos como fibrado cotangente de la variedad. Los físicos lo llaman espacio de fases asociado al espacio de configuración $\mathcal{V}$.

Las comprobaciones rutinarias (generalmente comprobación de la diferenciabilidad de ciertos objetos) se dejan a cargo del lector.

Sea $T_x^*(\mathcal{V})$ el espacio tangente a $\mathcal{V}$ en el punto x. Sea el conjunto

$$T^*(\mathcal{V}) = \Gamma(\mathcal{V}) = \cup_{x\in\mathcal{V}} T_x^*(\mathcal{V})$$

$T^*(\mathcal{V})$ es la notación matemática y $\Gamma(\mathcal{V})$ es la notación que se utiliza en física. Nosotros emplearemos la notación $\Gamma(\mathcal{V})$.

Existe una aplicación canónica

$$\pi : \Gamma(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$$

dada por $\pi(\omega_x) = x$. La función π asigna a cada 1-forma "el punto donde está aplicado". Claramente π es epiyectiva.

Para definir un elemento de $\Gamma(\mathcal{V})$ hay que dar:

- El punto donde está aplicado el covector, que consiste en enumerar n coordenadas, siendo n la dimensión de la variedad.
- Las componentes del covector en una base del espacio cotangente. Esto implica otras n coordenadas.

Como para definir un punto de $\Gamma(\mathcal{V})$ necesitamos $2n$ parámetros, todo parece indicar que en $\Gamma(\mathcal{V})$ habrá una estructura de variedad de dimensión $2n$.

Antes de nada debemos introducir una topología en este conjunto. Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ coordenadas locales en un abierto U. $q(U) = \mathrm{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Vamos a establecer una biyección de $\pi^{-1}(U)$ con un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$.

Sea $\omega_x \in \pi^{-q}(U)$. Entonces $x \in U$. Por lo tanto ω_x puede expresarse como

$$\omega_x = \xi_i(x) dx_i$$

Asociando al covector $\omega_x \in \pi^{-1}(U)$ las $2n$ coordenadas

$$\{x_1(x), \ldots, x_n(x), \xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$$

tenemos una biyección de $\pi^{-1}(U)$ con $\mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$.

Queremos que esta biyección sea un homeomorfismo. Por lo tanto introducimos en $\Gamma(\mathcal{V})$ la topología menos fina que hace que todas las biyecciones anteriores (una biyección para cada sistema de coordenadas local) sean continuas.

Dotado de esta topología y tomando como cartas locales las biyecciones antes descritas, $\Gamma(\mathcal{V})$ es una variedad diferenciable. Las coordenadas en el abierto $\pi^{-1}(U)$ se notan (q, p) cometiendo un abuso de notación.

$\Gamma(\mathcal{V})$ es unión numerable de compactos si $\mathcal{V}$ lo es, pues tomando un atlas con un conjunto numerable de cartas, podemos "'subir" este atlas al espacio de fases. Así $\Gamma(\mathcal{V})$ es paracompacta si $\mathcal{V}$ lo es. Esto nos asegura la existencia de particiones de la unidad en el espacio de fases.

Dotado de esta estructura diferenciable, la aplicación se describe en coordenadas locales como

$$\pi(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

lo que prueba que es diferenciable en coordenadas y por lo tanto es diferenciable globalmente. Además π es rango constante n.

Se tiene por construcción que $\pi^{-1}(x) = T^*_x(\mathcal{V})$. Este conjunto se llama fibra sobre el punto x y debido a la regularidad de π es una subvariedad del espacio de fases.

Del mismo modo que hemos construido $T^*(\mathcal{V})$ podríamos construir el llamado fibrado tangente, sin más que sustituir $T^*_x(\mathcal{V})$ por $T_x(\mathcal{V})$ y dx_i por $\frac{\partial}{\partial x_i}$. También se pueden construir fibrados tensoriales, tomando como fibra del punto x un espacio de tensores en ese punto.

3.2. Forma de Liouville

En el espacio de fases existe una 1-forma canónica llamada forma de Liouville. Su diferencial exterior dotará al espacio de fases de una estructura simpléctica.

Sea ω_x un elemento de $\Gamma(\mathcal{V})$ y sea Y_{ω_x} un vector tangente en ese punto. Definimos θ mediante la fórmula

$$\theta(Y_{\omega_x}) = \omega_x(\pi_*(Y_{\omega_x}))$$

Vamos a construir la forma de Liouville de otro modo.

Dado un punto $p = (x, \omega_x)$ la aplicación tangente a la proyección canónica establece un epimorfismo $d\pi_p : T_p(\Gamma(\mathcal{V})) \to T_{\pi(p)}(\mathcal{V})$. Como ω_x es una forma lineal sobre $\mathcal{V}$ la aplicación cotangente a π le hace corresponder una forma lineal sobre la variedad $\Gamma(\mathcal{V})$. Resulta que esta forma es precisamente la forma de Liouville en ese punto. En fórmulas

$$\theta_p = d\pi^*_p(\omega_x) \text{ siendo } p = (x, \omega_x)$$

Para comprobar la diferenciabilidad podemos hacer uso de coordenadas locales, pues el ser diferenciable es una cuestión local.

Simples comprobaciones nos dan que

$$\theta = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n$$

lo que implica que en efecto la forma es diferenciable. La 1-forma que acabamos de construir se denomina forma de Liouville.

Consideramos ahora la 2 forma $\omega_2 = d\theta$. Esta forma es cerrada por ser exacta y además es no degenerada puesto que en coordenadas locales se expresa como

$$\omega_2 = d\xi_i \wedge dx_i$$

En algunos libros la forma simpléctica se define con el signo cambiado Esto solo es cuestión de convenio.

En el espacio de fases el teorema de Darboux es inmediato. Tomando coordenadas q en la variedad $\mathcal{V}$, podemos “subir” las coordenadas al espacio de fases y nos da unas coordenadas (q, p). Sin embargo pueden existir coordenadas canónicas que no se obtengan de este modo.

3.3. Transformaciones canónicas puntuales

Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria, y $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo de la variedad. Esta aplicación la podemos “subir” al espacio de fases:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & \Gamma(\mathcal{V}) & \to & \Gamma(\mathcal{V}) \\ & \omega_x & \to & (\varphi_x)^*(\omega_x) \end{array}$$

donde $(\varphi_x)^*$ denota la aplicación cotangente a φ en el punto x.

Definición 3.1 *φ^* se llama* aplicación cotangente[1] *del difeomorfismo φ.*

La notación empleada para la aplicación cotangente y para la imagen inversa con el morfismo φ son iguales. El contexto nos aclarará cual es en cada caso.

- Esta función hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathcal{V}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma(\mathcal{V}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

- φ^* es biunívoca pues la aplicación cotangente es biunívoca en todo punto, dado que φ es un difeomorfismo.

- Se cumple que $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}_{\Gamma(\mathcal{V})}$ y que $(\varphi\phi)^* = \phi^*\varphi^*$.

[1] Se puede definir la aplicación cotangente de un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, dando lugar a una aplicación $\varphi^* : \Gamma(\mathcal{V}') \to \Gamma(\mathcal{V})$. Obsérvese que estamos en presencia de un functor contravariante

- φ^* es de clase $\mathbb{C}^\infty$ como se comprueba fácilmente usando coordenadas locales. Por tanto φ^* es un difeomorfismo cuyo inverso es justamente $(\varphi^{-1})^*$.
- Si $\varphi^* = \text{Id}$ entonces $\varphi = \text{Id}$ utilizando el diagrama conmutativo anterior.
- φ^* conserva la forma simpléctica y es por lo tanto una transformación canónica (vease problema 35).

Definición 3.2 *Un difeomorfismo de la forma φ^* para cierto $\varphi \in \text{Dif}(\Gamma(\mathcal{V}))$ se denomina* transformación canónica puntual.

La aplicación de $\text{Dif}(\mathcal{V})$ en $\text{Dif}(\Gamma(\mathcal{V}))$ que manda a φ hasta φ^* es un antimorfismo de grupos inyectivo. De esta manera $\varphi \to (\varphi^{-1})^*$ es un morfismo de grupos inyectivo. Su imagen está contenida en el grupo simpléctico del espacio de fases.

Si X es un campo en $\mathcal{V}$ que genera un grupo uniparamétrico τ_t, podemos subir este grupo uniparamétrico al espacio de fases donde obtenemos el grupo τ^*_{-t}. Este grupo generará un campo en el espacio de fases que denotamos X^*. X^* es el campo cotangente asociado a X. Naturalmente X^* es una transformación canónica infinitesimal.

Veamos que aunque X no genere un grupo global, podemos asociarle a X el campo cotangente. Primero calculamos X^* en coordenadas locales.

Si $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces

$$X^* = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

donde las b_i se pueden conocer sin más que tener en cuenta que X^* es un campo localmente hamiltoniano.

Aplicando que $(X^*)^L(\omega_2) = 0$ obtenemos

$$b_i = -\xi_h \frac{\partial a_h}{\partial x_i}$$

De esta forma podemos subir un campo cualquiera en un dominio coordenado. Se ve que en la intersección de dominios coordenados los campos así construidos coinciden y entonces es lícito afirmar que a cada campo le podemos asociar un campo cotangente aunque no genere un grupo global.

Por ser el paréntesis de Lie una operación de tipo local, podemos comprobar que la asociación $X \to X^*$ es un morfismo de álgebras de Lie inyectivo. Ello quiere decir que $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$. En particular esto demuestra que los campos localmente hamiltonianos cierran un álgebra de Lie de dimensión infinita si la variedad simpléctica es un espacio de fases.

3.4. Estructuras complejas

Además de los espacios de fase, existen en matemáticas otro ejemplo remarcable de variedades simplécticas. Para estudiar esta teoría en profundidad deberíamos conocer el concepto de variedad compleja. Sin embargo nos quedaremos en un escalón ligeramente inferior y estudiaremos las estructuras casi-complejas, que utilizan solamente la teoria de variedades diferenciables reales.

Definición 3.3 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Una* estructura compleja *en $\mathcal{V}$ es un campo de endomorfismos J que cumple $(J_x)^2 = -\operatorname{Id}$ para todo $x \in \mathcal{V}$.*

Llamamos variedad casi-compleja *al par $(\mathcal{V}, J)$.*

Toda variedad casi-compleja es de dimensión par y el espacio tangente en todo punto tiene una estructura compleja.

El ejemplo más claro de variedad casi-compleja es el de variedad compleja que no es otra cosa que un espacio localmente isomorfo a $\mathbb{C}^n$ y donde las funciones de transición son funciones holomorfas.

Sin embargo nosotros nos restringiremos al caso de variedades reales (de ahí el prefijo "casi" que utilizamos).

Definición 3.4 *Sea $(\mathcal{V}, \omega_2)$ una variedad simpléctica. Una estructura compleja J es* compatible *con la estructura simpléctica si la aplicación*

$$g(X, Y) = \omega_2(X, J(Y))$$

es una métrica riemanniana en la variedad.

Generalizando el resultado dado para las estructuras complejas sobre espacios lineales tenemos

Proposición 3.1 *Toda variedad simpléctica tiene una estructura casi-compleja compatible.*

Demostración.

La demostración puede hallarse en [6]. □

Sabemos que la parte imaginaria de una estructura hermítica es una forma simpléctica. Para no introducir nuevas nociones sobre estructuras hermíticas diferenciables utilizaremos la siguiente definición, que el lector puede comprobar que en el caso lineal coincide con definición estandar (ver sección 1.10).

Definición 3.5 *Una* métrica hermítica *sobre una variedad casi compleja $(\mathcal{V}, J)$ es una métrica riemanniana g que además cumple*

$$g(X, Y) = g(J(X), J(Y))$$

para cualquier par de campos de la variedad.

Proposición 3.2 *Toda variedad casi-compleja admite una métrica hermítica.*

Demostración.

Sea T_2 una métrica riemanniana arbitraria, que existe por ser ser la variedad paracompacta. Sea entonces

$$g(X,Y) = T_2(X,Y) + T_2(J(X), J(Y))$$

Entonces g es una métrica hermítica. $\square$

Definición 3.6 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con una métrica hermítica g. Denominamos* forma fundamental *a la 2-forma ϕ definida como*

$$\phi(X,Y) = g(X, J(Y))$$

Basandonos en la definición de g se prueba que ϕ es antisimétrica y además es no degenerada pues g es no degenerada y J es un automorfismo en todo punto.

Tenemos entonces una 2-forma sin radical. Puede ocurrir sin embargo que no sea cerrada. En el caso de que si sea cerrada tendremos una variedad simpléctica. Estas variedades tienen un nombre especial. Se llaman variedades casi-Kähler. Si las variedades son complejas se denominan simplemente variedades de Kähler.

Los ejemplos más famosos de variedades Kähler son el espacio proyectivo complejo y sus subvariedades complejas. Pero esto no lo probaremos en estas notas (ver [2]).

3.5. Estructuras homogéneas

El ejemplo típico de estas variedades son los espacios de fases. Además de la estructura simpléctica, los espacios de fase tienen la propiedad de que la forma simpléctica admite una primitiva global. Esta es la conocida forma de Liouville.

Si nos restringimos al complementario de la sección nula, la forma de Liouville es regular (o sea, no nula) en todos los puntos.

La importancia de las variedades homogéneas se debe también a que a cada variedad de contacto se le puede asociar, de modo functorial, una variedad homogénea, reduciendo muchos problemas de las variedades de contacto a las variedades simplécticas. Por eso estas estructuras son muy importantes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Por último, lo que nosotros llamaremos variedad homogénea se denomina en otros libros variedad simpléctica exacta.

Definición 3.7 *Una* forma simpléctica homogénea *o* forma de Liouville *es una 1-forma θ que cumple:*

- *Es no nula en todo punto. $(\theta)_x \neq 0$ para todo x.*
- *$d\theta$ es una forma simpléctica.*

Al par $(\mathcal{V}, \theta)$ *lo denominamos* variedad simpléctica homogénea*.*

Toda estructura homogénea induce una estructura simpléctica, pero el reciproco solo es cierto localmente, tal como afirma el lema de Poincaré.

De ahora en adelante denotaremos ω_2 a $d\theta$. Debemos darnos cuenta de que varias estructuras homogéneas pueden dar lugar a la misma estructura simpléctica. Como en el caso simpléctico solo son susceptibles de poseer una estructura homogénea las variedades de dimensión par.

Definición 3.8 *Sea* $(\mathcal{V}, \theta)$ *una variedad homogénea. Un sistema de coordenadas* $\{x_i, \xi_i\}$ *en un abierto* U *es un sistema de* coordenadas canónicas homogéneas *si en esas coordenadas se cumple*

$$\theta = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n$$

Todo sistema de coordenadas canónicas homogéneas es también un sistema de coordenadas canónicas para la variedad simpléctica. Sin embargo, en general, el recíproco no es cierto.

Teorema 3.3 (de Darboux) *Todo punto de una variedad homogénea posee un entorno donde se pueden definir coordenas canónicas homogeneas.*

Demostración.

Nos remitimos a [21]. □

Tampoco aquí existe un teorema global de Darboux.

Definición 3.9 *Llamaremos* campo de homogeneidad *o* campo de Liouville *de* $(\mathcal{V}, \theta)$ *al campo* D *que cumple*

$$i_D\omega_2 = \theta$$

Como θ no es nunca nula el campo de homogeneidad tampoco es nunca nulo. Recordando que $p^{-1}\,(dx_i) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, en coordenadas canónicas

$$D = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

Proposición 3.4 *Con las notaciones anteriores se cumple:*

- $i_D\theta = 0$
- $D^L\theta = \theta$
- $D^L\omega_2 = \omega_2$
- $i_D\omega_2 = \theta$
- $D(x_i) = 0$

- $D(\xi_i) = \xi_i$

Definición 3.10 *Sean $(\mathcal{V}, \theta)$ y $(\mathcal{V}', \theta')$ dos estructuras homogéneas. Una* transformación canónica homogénea *es un difeomorfismo*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

que cumple $\varphi^*(\theta') = \theta$.

En el caso en que las dos variedades coincidan hablaremos de automorfismo simpléctico homogéneo. Los automorfismos simplécticos homogéneos forman un grupo respecto a la multiplicación. Es un subgrupo del grupo simpléctico asociado, debido a que la imagen inversa conmuta con la diferencial exterior.

En el caso en que el automorfismo sea entre abiertos de las variedades, nos referiremos a él como transformación canónica homogénea local.

Definición 3.11 *Un campo X que cumpla $X^L\theta = 0$ es una* transformación homogénea infinitesimal.

Aplicando la fórmula $[X, Y]^L = [X^L, Y^L]$ se comprueba que forman una subálgebra de Lie. Como la derivada y la diferencial exterior conmutan, toda transformación homogénea infinitesimal es un campo localmente hamiltoniano.

Definición 3.12 *Sea D el campo de homogeneidad de la variedad homogénea. Un campo tensorial T se dice que es homogéneo de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si cumple*

$$D^L(T) = mT$$

Ejemplos.

- x_i es homogénea de grado 0. ξ_i es homogénea de grado 1.
- D es un campo homogenéo de grado 0 pues $D^L(D) = 0$.
- ω_2 y θ son homogéneos de grado 1.
- La diferencial exterior conserva el grado. Si α es de grado m, entonces $d\alpha$ tambíen tiene grado m.
- Las transformaciones homogéneas conservan el grado.

Proposición 3.5 *Se cumple*

$$D^L(X_f) = X_{Df-f}$$

$$D\{f, g\} = \{D(f), g\} + \{f, D(g)\} - \{f, g\}$$

Demostración.

Al lector. $\square$

Corolario 3.6 *Si f es homogénea de grado m, entonces X_f es homogéneo de grado $m-1$.*

Si f es homogénea de grado r y g es homogénea de grado s, entonces $\{f, g\}$ es homogénea de grado $r+s-1$.

Problemas

29 Demostrar:

- Todo punto del espacio de fases posee un entorno donde se pueden introducir coordenadas canónicas. Para obtener este resultado no es necesario aplicar el teorema de Darboux.
- Si el espacio de configuración $\mathcal{V}$ admite un sistema de coordenadas global, entonces el espacio de fases $\Gamma(\mathcal{V})$ también. ¿Será cierto el recíproco?
- El espacio de fases es siempre una variedad orientable. Toda transformación canónica conserva el volumen de este espacio. Este resultado se conoce como teorema de Liouville.

30 El teorema de Darboux nos dice que toda variedad simpléctica es localmente isomorfa a un fibrado cotangente. Considerando variedades compactas, demostrar que existen variedades simplécticas que no son globalmente isomorfas a fibrados cotangentes.

31 Demostrar que el espacio de fases no es nunca una variedad compacta.

32 Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica compacta:

- La forma simpléctica no puede ser exacta. Si esto ocurriera, la forma de volumen también sería exacta y entrañaría una contradicción aplicando el teorema de Stokes.
- Si denotamos por $[\alpha]$ la clase de cohomología de una forma α, demostrar que $[\omega_2] \in H^2(\mathcal{V})$ no puede ser nulo.
- Como $[(\omega_2)^n] = [\omega_2]^n$, la clase de cohomología del elemento de volumen no puede ser nula.

33 Comprobar que en la construcción del atlas sobre el espacio de fases, las funciones de transición son en efecto diferenciables. Comprobar también que la construcción es independiente del atlas que tomemos.

34 Una sección del espacio de fases es una función

$$s : \mathcal{V} \to \Gamma(\mathcal{V})$$

que cumple $\pi \cdot s = \mathrm{Id}$. De este modo $s(x)$ es una forma diferencial sobre el punto x. Una sección asocia a cada punto x una 1-forma en ese punto. Demostrar, utilizando coordenadas locales, que existe una correspondencia biunívoca entre 1-formas en la variedad y secciones diferenciables del espacio de fases.

Hacer lo mismo con el fibrado tangente.

35 Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo.

- Probar que $\varphi^* : \Gamma(\mathcal{V}) \to \Gamma(\mathcal{V})$ conserva la forma de Liouville.
- Probar que conserva la forma simpléctica y que por lo tanto es una transformación canónica en el espacio de fases.

36 Demostrar que los campos X^* y X están relacionados por el morfismo π.
Supongamos que X^* genera un grupo global. ¿Podemos afirmar que X genera también un grupo global?

37 Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria y X un campo vectorial. Asociado a este campo tenemos la función

$$\xi_X : \Gamma(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$$

definida por $\xi_X(\omega_x) = < X_x, \omega_x > = < X_{\pi(\omega_x)}, \omega_x >$.

- Probar que ξ_X es diferenciable. Calcular su expresión en coordenadas.
- Denotamos por $\bar{X}$ el campo cuyo hamiltoniano es ξ_X. Ver la relación entre este campo y el campo cotangente X^*.
- Realizar esta construcción con el campo $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

38 Sea α una 1-forma sobre la variedad $\mathcal{V}$. Entenderemos dicha forma como una sección $\alpha : \mathcal{V} \to T^*(\mathcal{V})$ del espacio de fases. Si θ es la forma de Liouville tenemos que $\alpha^*(\theta) = \alpha$ donde el asterisco denota la imagen inversa. Además la forma de Liouville es la única forma sobre el espacio de fases que cumple dicha propiedad para toda 1-forma α definida en el espacio de configuración $\mathcal{V}$.

39 Sea $\mathcal{V}$ una variedad riemanniana (o semiriemanniana). La polaridad asociada a esta métrica permite establecer un difeomorfismo entre los fibrados cotangente y tangente de la variedad. De este modo el fibrado tangente de una variedad riemanniana tiene una estructura simpléctica. Debemos notar que la estructura de variedad simpléctica en el fibrado cotangente es "natural", pero la estructura simpléctica en el fibrado tangente depende de la métrica riemanniana que hayamos adoptado.

40 Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial simpléctico E.

- $\Gamma(\mathcal{V}) = E \times E^*$.
- La estructura simpléctica como espacio de fases, coincide con la estructura simpléctica natural definida en $E \times E^*$.

41 Sea φ una transformación canónica y f un hamiltoniano. Encontrar la relación entre los campos X_f y $X_{f \circ \varphi}$.

42 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ variedades. $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ la variedad producto. Demostrar que se tiene un isomorfismo canónico

$$T^*(\mathcal{V} \times \mathcal{V}') = T^*(\mathcal{V}) \times T^*(\mathcal{V}')$$

Se dice que un problema físico es separable si el espacio de configuración es el producto de dos variedades, $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$, y el hamiltoniano h se puede expresar (de modo no único) como $h = h + h'$ donde h es una función sobre $\mathcal{V}$ y h' es una función sobre $\mathcal{V}'$.

Ver las razones por las que el estudio de los problemas separables es más simple que el caso general y deducir que nombre de separable le va como anillo al dedo.

Demostrar que toda función sobre $\mathcal{V}$ conmuta con toda función sobre $\mathcal{V}'$ (una vez subidas al espacio de fases).

43 Es siguiente argumento prueba que una variedad homogénea no puede ser compacta.

Sabemos que una variedad homogénea es orientable pues en particular es simpléctica. Tenemos que $(d\theta)^n = d(\theta \wedge (d\theta)^{n-1})$. La forma de volumen es exacta y aplicando el teorema de Stokes concluimos.

44 Sea φ un automorfismo simpléctico homogéneo.

- Entonces
$$\varphi'(D) = D$$
donde D es el campo de Lioville.

- Si f es homogénea, entonces $f \circ \varphi$ también lo es. Generalizar el resultado a tensores.

- El campo X_f es una transformación canónica homogénea si y solo si df es homogénea de grado 1.

- Si ω es una k-forma homogénea, entonces $d\omega$ y $i_D\omega$ también son formas homogéneas.

45 Sean θ y θ' dos formas homogéneas que definan la misma estructura simpléctica. Probar que en general los grupos simplécticos homogéneos dependen de θ y de θ'.

Subvariedades lagrangianas

Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una subvariedad $L \subset \mathcal{V}$ es lagragiana si el espacio tangente en todo punto a la subvariedad es isótropo y además $\dim(L) = n = \dim(\mathcal{V})/2$.

- La sección nula del fibrado cotangente tiene como imagen una subvariedad del espacio de fases. La forma de Lioville en esa subvariedad es nula. La subvariedad es lagrangiana.

- Si entendemos las 1-formas como secciones del fibrado cotangente $\Gamma(\mathcal{V})$, la imagen de cualquier 1-forma es una subvariedad de dimensión n del espacio de fases. Dicha subvariedad es difeomorfa al espacio de configuración $\mathcal{V}$ mediante la proyección canónica.

- Dada una 1-forma α sobre una variedad, denotamos por $s_\alpha : \mathcal{V} \to \Gamma(\mathcal{V})$ la correspondiente sección. Con esta notación se cumple

$$(s_\alpha)^*\theta = \alpha$$

- La imagen de una sección dada por una 1-forma es lagrangiana si y solo si la forma es cerrada.

- Toda función f da lugar a una subvariedad lagrangiana asociada a su diferencial df. Dicha función se llama función generadora de la subvariedad.

- Sea $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ una subvariedad de dimensión r. El espacio tangente en $x \in \mathcal{V}'$ a la subvariedad es un subespacio de $T_x(\mathcal{V})$. Denotamos por $T_x^0(\mathcal{V}')$ el incidente de ese subespacio. El incidente es un subespacio del espacio dual. Llamamos fibrado incidente a $\mathcal{V}'$ al conjunto

$$\begin{aligned} N^*(\mathcal{V}') &= \cup_{x \in V'} T_x^0(\mathcal{V}') \\ &= \{(x, \omega_x) \in \Gamma(V) \text{ tales que } x \in \mathcal{V}', \omega_x \in T_x^0(\mathcal{V}')\} \end{aligned}$$

- El fibrado incidente de una subvariedad es una subvariedad del espacio de fases. Si tomamos coordenadas $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ en el la variedad de tal forma que $\mathcal{V}'$ sea el conjunto definido por las ecuaciones

$$x_{r+1} = 0, \cdots, x_n = 0$$

entonces el fibrado incidente tiene por ecuaciones

$$x_{r+1} = 0, \cdots, x_n = 0, \xi_1 = 0, \cdots, \xi_r = 0$$

- El fibrado incidente de una subvariedad es una subvariedad lagrangiana.

- Sea $V \ominus V'$ la variedad producto dotada de la forma simpléctica $\omega_2 - \omega_2'$. Este producto de variedades simplécticas es una variedad simpléctica.

- Dado un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ denotamos por Γ_φ si gráfica, que es el subconjunto de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)), x \in \mathcal{V}\}$$

La gráfica de un difeomorfismo es una subvariedad de $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}'$ difeomorfa a $\mathcal{V}$.

- Γ_φ es lagrangiana si y solo si φ es un difeomorfismo simpléctico. Toda subvariedad lagrangiana de $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}'$ se llama relación canónica.

4. Paréntesis de Poisson. Invariantes

4.1. Polaridad

Una métrica no degenerada permite establecer un isomorfismo entre un espacio vectorial y su dual, siempre que el espacio sea de dimensión finita. Globalizando este resultado a variedades simplécticas tenemos definida la polaridad.

La denotamos

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{p}: & \mathrm{Der}(\mathcal{V}) & \rightarrow & \bigwedge^1(\mathcal{V}) \\ & X & \rightarrow & i_X\omega_2 \end{array}$$

A una forma α le corresponde un campo X_α y a una función f le podemos asociar el campo X_f (ver sección 2.4).

La polaridad es una aplicación lineal sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, pero además si f es una función se tiene que $\mathsf{p}(f \cdot X) = f \cdot \mathsf{p}(X)$. La polaridad es también un morfismo de módulos, donde el anillo es $C^\infty(\mathcal{V})$.

La condición $d\omega_2 = 0$ no se emplea para nada en la demostración de la biunivocidad de p. El único resultado que empleamos es que $(\omega_2)_x$ es no degenerada en todo punto.

La polaridad también se puede entender como una aplicación diferenciable.

Definición 4.1 *Llamamos* polaridad *a la función*

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{p}: & T(\mathcal{V}) & \rightarrow & T^*(\mathcal{V}) \\ & X_x & \rightarrow & i_{X_x}(\omega_2)_x \end{array}$$

Esta aplicación es diferenciable (utilícense coordenadas canónicas) y biunívoca. Es por tanto un difeomorfismo entre las variedades. Este difeomorfismo hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(\mathcal{V}) \arrow[rr, "\mathsf{p}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T^*(\mathcal{V}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{V} & \end{tikzcd}$$

Si X es un campo vectorial, entendido como una sección del fibrado tangente, la composición $\mathsf{p} \cdot X$ es una sección del espacio de fases y por tanto es una 1-forma. Se puede comprobar fácilmente que esta forma es precisamente $i_X\omega_2$.

De este modo la polaridad nos permite transformar secciones de $T(\mathcal{V})$ en secciones de $T^*(\mathcal{V})$.

4.2. Paréntesis de Poisson

Asociado a la polaridad, podemos definir un paréntesis de Lie en el espacio de 1-formas. Por razones históricas se denomina paréntesis de Poisson.

Si α, α' son dos formas, su corchete de Poisson, denotado $\{\alpha, \alpha'\}$ es la 1-forma

$$\{\alpha, \alpha'\} = \mathsf{p}([X_\alpha, X_{\alpha'}])$$

Con esta operación el conjunto de formas es un álgebra de Lie de dimensión infinita sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Nótese que la estructura de álgebra de Lie en los campos de la variedad es natural y no depende más que de la estructura de variedad. Sin embargo la estructura de álgebra en el conjunto de 1-formas depende claramente de ω_2.

Por construcción las dos álgebras son isomorfas y por lo tanto esta nueva álgebra no nos aporta ninguna información.

Dotaremos ahora de estructura de álgebra de Lie al conjunto de funciones de una variedad simpléctica.

Definición 4.2 *Si f, g son dos funciones diferenciables en una variedad simpléctica $\mathcal{V}$, llamamos* paréntesis de Poisson *y denotamos $\{f, g\}$ a la función*

$$\{f, g\} = -\omega_2(X_f, X_g)$$

o también tenemos la fórmula

$$\{f, g\} = X_f(g)$$

La primera definición es un tanto extraña debido al signo menos. Ello se debe a que nosotros tomamos como forma simpléctica en el espacio de fases $d\theta$ y no su opuesta, que es lo que se hace en otros libros.

De la definición se derivan inmediatamente algunas propiedades interesantes.

Corolario 4.1 *El paréntesis de Poisson es una operación bilineal (sobre $\mathbb{R}$) y antisimétrica. Esto es, se cumple:*

- $\{f + f', g\} = \{f, g\} + \{f', g\}$
- $\{\lambda f, g\} = \lambda\{f, g\}$ *donde* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\{f, g\} = -\{g, f\}$. *En particular* $\{f, f\} = 0$.

Además $\{f, g \cdot g'\} = \{f, g\} \cdot g' + g \cdot \{f, g'\}$, que nos dice que el paréntesis de Poisson cumple la regla de Leibniz *para la derivación de productos.*

Demostración.

Utilizando la definición del paréntesis dada por $\{f, g\} = -\omega_2(X_f, X_g)$ obtenemos las primeras propiedades.

Si partimos de la definición $\{f, g\} = X_f(g)$ tenemos que

$$\{f, g \cdot g'\} = X_f(g \cdot g') = X_f(g) \cdot g' + g \cdot X_f(g')$$

donde hemos utilizado que X_f es una derivación del anillo de funciones. $\square$

Proposición 4.2 *Sea $d : \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) \to \bigwedge^1(\mathcal{V})$ la diferencial exterior. Entonces se cumple*

$$d\{f, g\} = \{df, dg\}$$

Demostración.

Al lector. $\square$

Por construcción, el paréntesis de Poisson es un operación local. Se puede restringir a cualquier abierto o aplicarlo simplemente a gérmenes de funciones. Ello nos permite preguntarnos cual será la expresión del corchete de Poisson en coordenadas locales.

Proposición 4.3 *En coordenadas canónicas tenemos*

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$

Demostración.

Tenemos que en coordenadas locales

$$X_f(g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) (g)$$

lo que demuestra el enunciado. $\square$

Proposición 4.4 *El paréntesis de Poisson introduce en $C^\infty(\mathcal{V})$ una estructura de álgebra de Lie. La dimensión de ese álgebra es infinita.*

Demostración.

Tenemos que

$$\{f, \{g, h\}\} = X_f(\{g, h\}) = X_f(X_g(h))$$

Análogamente

$$\{g, \{h, f\}\} = X_g(\{h, f\} = -X_g(X_f(h))$$

Si utilizamos que $d\{f, g\} = \{df, dg\}$ obtenemos

$$\{h, \{f, g\}\} = -X_{\{f,g\}}(h) = -[X_f, X_g](h)$$

Sumando las tres expresiones de la derecha y recordando que por la definición de paréntesis de Lie $[X, Y] = XY - YX$ obtenemos

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

que es la identidad de Jacobi. □

La proposición 4.2 no dice ahora que la diferencial exterior es un morfismo de álgebras de Lie. Su núcleo está formado por las funciones localmente constantes. En particular, si la variedad es conexa, el núcleo es $\mathbb{R}$.

Corolario 4.5 *La correspondencia $f \to X_f$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Esto demuestra la existencia de transformaciones canónicas infinitesimales no triviales en cualquier variedad simpléctica. Si en particular la variedad es compacta, todos estos campos generan grupos uniparamétricos globales, que estarán formados por transformaciones canónicas.

Es fácil comprobar que por ser la diferencial una operacion local tenemos que $\text{sop}(X_f) \subset \text{sop}(f)$. Si f es una función de soporte compacto, el campo asociado también y genera entonces un grupo global. Funciones de soporte compacto se pueden construir pues al ser la variedad paracompacta existen particiones de la unidad.

Definición 4.3 *Dos funciones f, están en* involución *si $\{f, g\} = 0$.*

Como $\{f, g\} = X_f(g)$, si dos funciones están en involución, g es integral primera del campo X_f y viceversa.

Proposición 4.6 *Si f está en involución con g y con h, entonces está en involución con $\{g, h\}$*

Demostración.

Utilizando la identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} = -\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\}$$

y la parte de la derecha es nula. □

Aplicando esta proposición, si conocemos dos integrales primeras de un campo hamiltoniano podemos construir otra integral primera. Sin embargo muchas veces las integrales primeras que construimos no nos aportan nada pues "dependen funcionalmente" de las que ya teníamos.

Corolario 4.7 *Las integrales primeras de un campo hamiltoniano X_f forman una subálgebra de Lie.*

Demostración.

g es una integral primera de X_f si y solo si $\{f, g\} = 0$. □

4.3. Formas invariantes

Los campos hamiltonianos son los que describen la evolución de un sistema dinámico en el espacio de fases.

En todos los problemas "físicos" podemos suponer que el campo hamiltoniano que describe el sistema denámico genera un grupo uniparamétrico. Ello es debido a que debemos saber para cualquier instante de tiempo el lugar donde se encuentran todos los puntos del espacio de fases. Caso de no ser así, es posible que el problema no sea "físico" o que se haya elegido mal el espacio de configuración del problema.

Definición 4.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria y X un campo de vectores sobre la variedad. Una k-forma α es un* invariante *del campo X si*

$$X^L(\alpha) = 0$$

Las funciones invariantes reciben también el nombre de integrales primeras *o* constantes del movimiento *del campo X. Son las que cumplen*

$$X(f) = 0$$

Ejemplos.

- Una función g es integral primera de un campo hamiltoniano X_f si $\{f, g\} = 0$. Aplicando la identidad de Jacobi, el conjunto de integrales primeras de un campo hamiltoniano es una subálgebra de Lie del conjunto de todas las funciones.

- La forma simpléctica ω_2 también es un invariante de todo campo hamiltoniano, pues ya hemos probado que
$$(X_f)^L(\omega_2) = 0$$
En general será invariante por cualquier campo localmente hamiltoniano.

- Del mismo modo el elemento de volumen es un invariante de cualquier campo localmente hamiltoniano.

- Consideremos la variedad simpléctica $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (q, p). Sea X es campo $\frac{\partial}{\partial q}$ y sea f una función que dependa solo de p. Entonces la forma $\alpha = f \cdot dq \wedge dp$ es invariante.

- En general, dado un campo que sea la parcial de una coordenada, toda forma que se construya utilizando solamente funciones que no dependan de esa coordenada, es una forma invariante. Cartan demostró que si el campo no se anula en un punto está es la situación general, tal como demostraremos.

Supongamos que el campo X genera un grupo uniparamétrico global τ_t. Una k-forma es invariante por X si y solo si $\tau_t^*(\alpha) = \alpha$. Una forma es invariante para un campo X si es invariante para su flujo[1].

[1] El flujo de un campo X es la aplicación $\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\tau(t, x) = \tau_t(x)$

Proposición 4.8 (Poincaré-Cartan) *Supongamos que X genera un grupo global. Si α es una p-forma invariante para toda parte compacta K de cualquier subvariedad de dimensión p se tiene*

$$\int_K \tau_t^*(\alpha) = \int_K \alpha = \int_{\tau_t(K)} \alpha \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Esto justifica el nombre histórico de invariantes integrales. Antes de Cartan las formas exteriores, mejor dicho el análogo a las formas exteriores, solo servían para ser integradas. Cartan les dió un significado geométrico propio, sin referirnos para nada al concepto de integral.

El recíproco de esta proposición también es cierto, aunque no lo probaremos aquí. Vease [1]. □

Definición 4.5 *Sea X un campo. Una $(p-1)$-forma α es un* invariante relativo *si $d\alpha$ es una p-forma invariante.*

Aplicando el teorema de Stokes al teorema de Poincaré-Cartan obtenemos

Corolario 4.9 *Sea X un campo que genera un grupo global. Si α es una $(p-1)$-forma invariante relativa, para toda parte compacta K de cualquier subvariedad de dimensión p se tiene*

$$\int_{\partial K} \tau_t^*(\alpha) = \int_{\partial K} \alpha \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Proposición 4.10 *Sea X un campo en una variedad, α y β dos formas invariantes. Entonces*

- *$i_X\alpha$ es un invariante de X.*
- *$d\alpha$ es un invariante de X.*
- *$\alpha \wedge \beta$ es invariante.*

Demostración.

La derivada de Lie conmuta con la contracción interior

$$X^L \cdot i_X = i_X \cdot X^L$$

Luego $X^L(i_X\alpha) = i_X(X^L(\alpha)) = 0$.

Del mismo modo la derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior y $d\alpha$ es un invariante.

La derivada de Lie es una derivación del álgebra exterior. Entonces

$$X^L(\alpha \wedge \beta) = X^L(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge X^L(\beta)$$

que es nulo. $\square$

De este modo el conjunto de formas invariantes de un campo X es una subálgebra del álgebra exterior de la variedad que es estable mediante los operadores d y i_X.

Veamos la interpretación en coordenadas del concepto de forma invariante.

Sea x un punto de la variedad donde el campo X no sea nulo. Se sabe por ecuaciones diferenciales que en un entorno de x se puede elegir unas coordenadas $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de tal forma que localmente

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Si la forma α se escribe en coordenadas

$$\alpha = \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

tenemos que

$$X^L(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_{i_1,\cdots,i_k}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Luego todas las funciones $\alpha_{i_1,\cdots,i_k}$ deben tener derivada parcial nula con respecto a x_1. Bajo condiciones bien conocidas esto es equivalente a que ninguna de esas funciones dependa de la coordenada x_1.

4.4. Invariantes integrales absolutos

Si multiplicamos un campo vectorial X por una función f (no nula), las curvas integrales del campo fX son, geométricamente, las mismas que las curvas integrales de X, aunque recorridas con otra velocidad. Decimos en este caso que todas las curvas integrales de fX y las curvas integrales de X tienen el mismo soporte[2].

Si un objeto es invariante por todas las posibles reparametrizaciones de una curva, podemos afirmar que es invariante para el soporte de la curva, que no es otra cosa que la imagen mediante una parametrización cualquiera del conjunto $\mathbb{R}$, que entenderemos como una variable temporal. Bajo condiciones bastante generales el soporte la curva será una subvariedad de dimensión 1.

Definición 4.6 *Una k-forma α es un* invariante integral absoluto *de un campo X si se cumplen las condiciones*

$$X^L(\alpha), \quad i_X\alpha = 0$$

Estas condiciones son equivalentes a que

$$i_X\alpha = 0, \quad i_X d\alpha = 0$$

[2]En realidad le estamos asociando,de un modo diferenciable, a cada punto de la variedad $\mathcal{V}$ un subespacio vectorial de dimensión 1. Esto no es más que un subfribrado regular de rango 1 del fibrado tangente.

En particular los invariantes absolutos son formas invariantes.

Proposición 4.11 *Si α es un invariante integral absoluto de un campo X, entonces α es invariante integral absoluto por todo campo de la forma fX.*

Demostración.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
i_{(fX)}\alpha &= f i_X \alpha = 0 \\
i_{(fX)}d\alpha &= f i_X d\alpha = 0
\end{aligned}
$$

utilizando la segunda definición. □

Si el campo no se anula en un punto podemos suponer que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Observemos que en este caso, todas las demás coordenadas son integrales primeras del campo. Razonando de modo parecido a lo hecho en la sección anterior tenemos que en la expresión local de una forma no puede aparecer la coordenada x_1, ni la diferencial dx_1 de esa coordenada.

Como diría Cartan, los invariantes integrales absolutos de un campo X son los que se pueden construir utilizando únicamente integrales primeras y diferenciales de las integrales primeras.

4.5. Subvariedades invariantes

Pasemos ahora al caso de una variedad simplectica y de un campo hamiltoniano.

La integral primera más evidente de un campo hamiltoniano X_f es el propio hamiltoniano, pues $\{f, f\} = 0$ por la antisimetría del paréntesis de Poisson. Este resultado, se conoce en física como el teorema de consevación de la energía.

Esto nos dice que las curvas integrales de X_f se mantienen sobre la hipersuperficie $f = cte$. La hipersuperficie puede no ser variedad en algunos puntos.

Definición 4.7 *Sea $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ una subvariedad y X un campo definido en toda la variedad. $\mathcal{V}'$ es una* subvariedad invariante *si para todo punto $x' \in \mathcal{V}$ se tiene que $X_{x'} \in T_{x'}(\mathcal{V}')$. El campo X se puede entender como un campo en la subvariedad.*

Si tenemos un punto de $\mathcal{V}'$, la curva integral del campo X restringido a $\mathcal{V}'$ tiene que ser la misma que la curva integral del campo X en toda la variedad, debido al teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales. Pero el sistema de ecuaciones diferenciales en la subvariedad siempre tendrá menos variables que el sistema equivalente en toda la variedad. De este modo, el encontrar subvariedades invariantes reduce el orden del sistema de ecuaciones diferenciales.

Inversamente, si tomamos un punto arbitrario de una subvariedad, y las curvas integrales de X permanecen en la subvariedad, entonces dicha subvariedad es invariante. En efecto, si calculamos los vectores tangentes a esas curvas tenemos que pertencen al espacio tangente de la subvariedad.

Proposición 4.12 *Sea $g_i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, i = 1 \cdots k$ un conjunto de integrales primeras de un campo hamiltoniano X_f* funcionalmente independientes[3]*. Igualando a cero esas funciones obtenemos una subvariedad $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$. $\mathcal{V}'$ es una subvariedad invariante.*

Demostración.

Que es subvariedad es un resultado elemental de análisis.

Como son integrales primeras, el valor a lo largo de las curvas integrales de X_f es siempre el mismo, en este caso cero. Las curvas integrales del campo se mantienen en la subvariedad, que es entonces invariante. □

Sumando constantes a las funciones, se obtiene un resultado análogo igualando a constantes las integrales primeras.

Recordemos que para que las funciones sean integrales primeras del campo hamiltoniano debe cumplirse $\{g_i, f\} = 0$.

Los sistemas hamiltonianos más sencillos son aquellos que poseen gran cantidad de integrales primeras independientes. Además si las integrales primeras están en involución, el problemas es todavia más sencillo.

Definición 4.8 *Un sistema hamiltoniano X_f de dimensión $2n$ es* integrable *si posee n integrales primeras $f_1 = f, f_2, \dots, f_n$ que están dos a dos en involución.*

Que esten dos a dos en involución significa que $\{f_i, f_j\} = 0$. De esta forma los grupos uniparamétricos que generan conmutan.

Si tenemos un conjunto de integrales primeras, la subvariedad que se obtiene igualando a constantes dichas integrales es una subvariedad invariante. El teorema fundamental sobre sistemas integrables nos dice que si esa subvariedad es compacta, entonces necesariamente es isomorfa a toro de dimensión n (véase [2, 6]).

Definición 4.9 *Un punto $x_0 \in \mathcal{V}$ es un* punto de equilibrio *de un campo X si $X_{x_0} = 0$.*

Si x_0 es un punto de equilibrio, la curva integral se reduce a ese único punto, luego el punto permanece estable aunque el tiempo discurra. Si las curvas integrales de puntos próximos a x_0 permanecen en un entorno de x_0, el punto de equilibrio es estable. En otro caso se dice que el punto de equilibrio es inestable.

Proposición 4.13 *Los puntos de equilibrio de un campo hamiltoniano X_f son los puntos que anulan la diferencial de f, que normalmente son llamados* puntos críticos *de la aplicación f.*

[3]Un conjunto de funciones es funcionalmente independiente en un punto si sus diferenciales en ese punto son linealmente independientes.

Problemas

46 La polaridad es una operación de tipo local. Calcular la 1-forma que le corresponde al campo

$$X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

47 Sea $\mathcal{V}$ una variedad riemaniana. Intentar definir un paréntesis de Poisson en el fibrado tangente.

48 Calcular los paréntesis de Poisson de las funciones coordenadas.

49 El paréntesis de Poisson de dos formas cerradas es una forma exacta. Encontrar una primitiva de dicha forma exacta.

50 Calcular $\{f, x_i\}$ y $\{f, \xi_i\}$.

51 El paréntesis de Lie de dos campos hamiltonianos es de nuevo hamiltoniano. Encontrar el hamiltoniano del paréntesis.

Dos campos hamiltonianos conmutan si y solo si el paréntesis de Poisson de los hamiltonianos es una función localmente constante.

52 Demostrar que las condiciones de la definición 4.6 son equivalentes.

53 Sea X un campo localmente hamiltoniano. Probar la verdad o falsedad de las afirmaciones:

- Una 1-forma α en invariante por el campo X si y solo si $\mathsf{p}(X)$ y α están en involución (su paréntesis de Poisson es nulo).
- El paréntesis de Poisson de dos formas invariantes es invariante.

54 El conjunto de invariantes integrales absolutos de un campo X es una subálgebra estable por el operador d.

5. Simetrías

5.1. Acciones simplécticas

Supongamos que X_f es un campo hamiltoniano que pretendemos integrar. Sea Y un campo invariante de X_f. Esto es lo mismo que decir que los campos conmutan, $[X_f, Y] = 0$. Supongamos que este campo Y genera un grupo uniparamétrico completo $\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Tenemos entonces que $\tau_t^*(X_f) = X_f$. Si el campo Y es también un campo hamiltoniano X_g, las funciones f y g estarán en involución puesto que sus campos conmutan. De este modo, la invariancia del campo X_f por un grupo uniparamétrico da lugar a una integral primera. Esto que acabamos de enunciar es una versión del teorema de E. Noether.

Si en vez de un grupo de Lie unidimensional, el campo fuera invariante por un grupo de Lie r-dimensional, tomando los campos asociados a una base del álgebra de Lie, construiríamos r integrales primeras.

Definición 5.1 *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica conexa. Decimos que una acción*[1]

$$\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

es simpléctica *si ϕ_g es una transformación canónica para todo $g \in G$.*

Cuando hablemos de acciones, sobreentenderemos que son de tipo simpléctico. La acción también se puede entender como un morfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \to & \mathrm{Dif}(\mathcal{V}) \\ & g & \to & \phi_g \end{array}$$

Ejemplos.

- Sea X un campo locamente hamiltoniano que genere un grupo uniparamétrico global. La aplicación
$$\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$
es una acción del grupo de Lie $\mathbb{R}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$. Como el campo es localmente hamiltoniano la acción es simpléctica.

[1] Sobreentendemos que la acción es diferenciable, esto es que la aplicación ϕ es diferenciable. Además todas las acciones serán por la izquierda. Mediante ϕ_g denotamos la aplicación $\phi_g(x) = \phi(g, x)$.

- Sea S^2 la esfera unidad dotada de las coordenadas[2] cilíndricas (θ, h) donde θ es el ángulo y h (ó z) la altura. Con la forma $d\theta \wedge dh$ la esfera es una variedad simpléctica. La circunferencia unidad S^1 actua sobre la variedad como giros alrededor del eje z.
$$\begin{array}{cccc} \phi: & S^1 \times S^2 & \to & S^2 \\ & (\alpha, (\theta, h)) & \to & (\alpha + \theta, h) \end{array}$$
Esta acción conserva el área y por lo tanto es simpléctica.

- Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ el toro bidimensional. Dotamos de coordenadas angulares (θ_1, θ_2) es una variedad simpléctica con la 2-forma $\omega_2 = d\theta_1 \wedge \theta_2$. Dicho toro también se puede interpretar como un grupo de Lie G. La acción
$$\begin{array}{ccc} G \times T^2 & \to & T^2 \\ (\lambda_1, \lambda_2), (\theta_1, \theta_2) & \to & (\theta_1 + \lambda_1, \theta_2 + \lambda_2) \end{array}$$
es simpléctica.

- Sea $\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una acción arbitraria en el espacio de configuración. La subida de esta acción al fibrado cotangente
$$\tilde{\phi} : G \times \Gamma(\mathcal{V}) \to \Gamma(\mathcal{V})$$
donde $\tilde{\phi}_g = (\phi_g^{-1})^*$, es una acción simpléctica de G en el espacio de fases. Este tipo de acciones se dice que son **puntuales**, pues todos los difeomorfismo son transformaciones puntuales. Recordemos que las transformaciones puntuales ademas de conservar la estrutura simpléctica, conservan también la forma de Liouville.

5.2. Derivada de una acción

Dada una acción ϕ y un elemento $X \in \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie del grupo, podemos construir un campo en la variedad.

Asociado al elemento X, existe un morfismo de grupos
$$\exp_X : \mathbb{R} \to G$$
La composición de este morfismo con ϕ, da lugar a una acción de $\mathbb{R}$ en la variedad. El campo que le corresponde a esta variedad lo denotaremos por $\tilde{X}$ y diremos que es campo asociado a X. En fórmulas este campo se calcula como
$$\tilde{X}(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} ((\exp tX) \cdot x)$$
De esta manera construimos una aplicación $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathcal{V})$ que es lineal y cumple
$$\phi'([X, Y]) = -[\phi'(X), \phi'(Y)]$$
Podemos decir, que salvo el signo que no aporta nada, tenemos un morfismo de álgebras de Lie ϕ'.

[2]Dichas coordenadas solo son válidas en un abierto, pero esto no afecta para nada a nuestros propositos

Definición 5.2 *Decimos que ϕ' es la derivada de la acción ϕ.*

Si la acción es simpléctica todos los campos que construyamos serán localmente hamiltonianos. De este modo ϕ' valora en la subálgebra de los campos localmente hamiltonianos[3].

5.3. Acciones hamiltonianas

A nosotros nos interesan aquellas acciones que tengan asociados campos hamiltonianos, de tal forma que todo campo $\tilde{X} = \phi(X)$ tenga un hamiltoniano. Además nos interesa que dicho hamiltoniano se pueda elegir de modo que se respete la estructura de álgebra de Lie. Ello nos lleva a considerar la siguiente

Definición 5.3 *Una acción simpléctica de G en $\mathcal{V}$ es* hamiltoniana[4] *si existe un* antimorfismo[5] *de álgebras de Lie*

$$\begin{array}{rccc} \mu^* : & \mathfrak{g} & \to & C^\infty(\mathcal{V}) \\ & X & \to & \mu^X \end{array}$$

que cumpla que μ^X sea un hamiltoniano de $\tilde{X} = \phi'(X)$. La aplicación μ^* se llama comomento*.*

De este modo $\tilde{X} = X_{\mu^X}$. Además se debe cumplir

$$\mu^{[X,Y]} = -\{\mu^X, \mu^Y\}$$

Como el hamiltoniano de un campo no es único, sino que se le puede sumar una constante, puede existir más de un comomento μ^* que cumpla lo pedido. A nosotros con que exista uno nos llega y nos sobra.

Existen dos problemas por los que una acción simpléctica puede no ser hamiltoniana:

- Debido a que algunos campos localmente hamiltonianos no son hamiltonianos. Esto equivale a que algunas formas pueden ser cerradas pero no exactas. Este es un problema de la cohomología de la variedad.
- A pesar de que todos los campos sean hamiltonianos, puede ser imposible elegir para cada uno de ellos un hamiltoniano de tal forma que se conserve la estructura de álgebra de Lie. Este problema tiene que ver con la cohomología del álgebra de Lie.

[3] Si trabajamos con grupos de Lie de dimensión infinita, el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{Dif}(\mathcal{V})$ es precisamante $\mathrm{Der}(\mathcal{V})$ y el álgebra de Lie del grupo simpléctico está formada por los campos localmente hamiltonianos. En este caso ϕ' se entiende como la derivada de un morfismo de grupos.

[4] También se llaman acciones de Poisson

[5] Llamamos antimorfismo de álgebras de Lie a una aplicación lineal ϕ que cumple $\phi([X,Y]) = -[\phi(X),\phi(Y)] = [\phi(Y),\phi(X)]$.

Proposición 5.1 *Dada una acción arbitraria $\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, la subida de esa acción al fibrado cotangente siempre es hamiltoniana. Un hamiltoniano del campo $\tilde{X}$ se obtiene mediante la fórmula*

$$\mu^X = -d(i_{\tilde{X}}\theta)$$

Demostración.

La demostración se base en que la acción es puntual y por lo tanto conserva la forma de Liouville, $\tilde{X}^L(\theta) = 0$.

$$0 = \tilde{X}^L(\theta) = (di_{\tilde{X}} + i_{\tilde{X}}d)\theta = di_{\tilde{X}}\theta + i_{\tilde{X}}d\theta$$

De esta forma $i_{\tilde{X}}d\theta = \mathsf{p}(\tilde{X}) = -d(i_{\tilde{X}}\theta)$.

Queda comprobar que en efecto $\mu^{[X,Y]} = -\{\mu^X, \mu^Y\}$, lo cual es un cálculo sencillo. □

Veamos otro ejemplo de acción hamiltoniana.

Proposición 5.2 *Sea $\phi : G \to Sp(E)$ una representación[6] lineal. La acción inducida por dicha representación es hamiltoniana.*

Demostración.

A cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ le corresponde, por diferenciación, un elemento $\bar{X}$ de $\mathfrak{sp}(E)$ que es un endomorfismo de E. Dicho elemento $\bar{X}$ se puede entender también como un campo diferencible en la variedad y además coincide con $\tilde{X}$ que es el campo asociado a la acción. Tenemos que $i_{\tilde{X}}\omega_2$ es cerrada y por lo tanto, al estar en un espacio vectorial, por el lema de Poincaré es exacta. De este modo $i_{\tilde{X}}\omega_2 = d\mu^X$. La constante indeterminada de esa función se fija con la condición $\mu^X(0) = 0$. Es inmediato comprobar que de este modo se obtiene un anti-morfismo de álgebras de Lie. □

La función anterior se puede probar que es

$$\mu^X(x) = \frac{1}{2}\omega_2(\tilde{X}(x), x)$$

5.4. Momento de una acción

Dada una acción hamiltoniana de un grupo de Lie de dimensión r, si tomamos una base $\{X_i\}$ del álgebra, tenemos r funciones diferenciables μ^{X_i}. Estas funciones se pueden agrupar en una sola función con valores vectoriales.

[6] Un representación lineal es un morfismo de grupos de G en el grupo lineal de un espacio vectorial (de dimensión finita). Si la imagen del morfismo está incluida en el grupo simpléctico, la acción se dice que es simpléctica puesto que ϕ_g es un morfismo métrico, para cualquier elección del elemento $g \in G$.

Definición 5.4 *Dada una acción hamiltoniana ϕ diremos que una aplicación diferenciable*

$$\mu : \mathcal{V} \to \mathfrak{g}^*$$

es un momento de la acción si

$$d(i_X \circ \mu) = i_{\phi'(X)}\omega_2 = \mu^X \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}$$

En diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "i_X \circ \mu"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "i_X"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Por tanto μ es un momento si $i_X \circ \mu$ es un hamiltoniano de $\phi'(X)$.

El momento no tiene por que ser único, pues no es único el hamiltoniano de un campo.

5.5. Teorema de Noether

Pasemos ya al estudio de como los grupos de simetría nos proporcionan integrales primeras.

Definición 5.5 *Dada una acción simpléctica ϕ, un hamiltoniano $f : \mathcal{V} \to R$ es invariante por la acción si*

$$f(x) = f(\phi_g(x)) \text{ para todo } g \in G, x \in \mathcal{V}$$

Esta definición también se pueden encontrar en la forma $\phi^*(f) = f$, utilizando la imagen inversa.

Teorema 5.3 (de Noether) *Si f es invariante por una acción hamiltoniana ϕ que posee un momento μ, entonces μ es una constante del movimiento. Igualando a constantes las componentes del momento obtenemos subvariedades invariantes.*

Demostración.

Es suficiente demostrar que μ^X es invariante, siendo X un elemento cualquiera del álgebra de Lie.

El subgrupo de $\phi'(X) = \tilde{X}$ es la restricción de la acción ϕ y por lo tanto f es invariante por el flujo de $\phi'(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Trasladado a la noción infinitesimal

$$(\phi'(X))^L(f) = 0$$

lo que implica $\{\mu^X, f\} = 0$, que es lo que pretendiamos demostrar. $\square$

5.6. Variedades riemannianas

Supongamos ahora que $\mathcal{V}$ está dotado de una métrica riemanniana o semi-riemanniana g. La polaridad establece un isomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente. Via este isomorfismo podemos considerar en el fibrado tangente una estructura simpléctica.

Si un grupo de Lie G actua por isometrías (cada ϕ_g es una isometría), la subida de esta acción al fibrado tangente conserva la 1-forma de la estructura simpléctica.

En este caso se pueden construir un momento de la acción mediante la fórmula

$$(i_X \circ \mu)(D_x) = g(D_x, \tilde{X}_x)$$

donde $\tilde{X}$ es el campo sobre el espacio de configuración que le corresponde elemento del álgebra de Lie X.

6. Variedades de Poisson

6.1. Definición

Existe una generalización del concepto de variedad simpléctica, que sirve también como marco para el estudio de los sistemas hamiltonianos. Este enfoque hace incapié en las propiedades del paréntesis de Poisson.

Hay muchos ejemplos, sobre todo sacados de la física, donde se puede definir de una manera simple un paréntesis de Poisson, a pesar de no existir ninguna estructura simpléctica.

Definición 6.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria de dimensión finita. Un* paréntesis de Poisson *es una operación*

$$\begin{array}{rccc} \{\cdot,\cdot\}: & \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) \times \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) \\ & (f,g) & \to & \{f,g\} \end{array}$$

que cumple:

- *Es antisimétrico.* $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- *Es bilineal sobre* $\mathbb{R}$. $\{\lambda f + f', g\} = \lambda\{f,g\} + \{f',g\}$ *donde* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Identidad de Jacobi. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.
- Regla de Leibniz. $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f,h\}$.

Una variedad donde se ha introducido un paréntesis de Poisson se denomina variedad de Poisson*.*

Toda variedad de Poisson tiene una estructura de álgebra de Lie en su anillo de funciones. Este álgebra es de dimensión infinita. Toda la terminología y resultados referentes a álgebras de Lie se traslada de este modo a las variedades de Poisson.

Ejemplos.

- El ejemplo más evidente de variedad de Poisson es el de variedad simpléctica. En toda variedad simpléctica se puede definir, de un modo canónico, un paréntesis de Poisson (ver sección 4.2).
- Si definimos $\{f,g\} = 0$ para todo par de funciones, tenemos una estructura trivial de Poisson. Evidentemente esta estructura no aporta nada.

- En $\mathbb{R}^{2n}$ se puede introducir un paréntesis de Poisson mediante la fórmula

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$

  Este paréntesis es el asociado a la estructura simpléctica estandard de $\mathbb{R}^{2n}$.

- En $\mathbb{R}^{2n+r}$ dotado de las coordenadas $\{x_1, \cdots x_n, \xi_1, \cdots \xi_n, z_1, \cdots z_r\}$ podemos definir un paréntesis con la fórmula del ejemplo anterior. Sin embargo en esta nueva variedad existen funciones no constantes, por ejemplo z_1 que cumplen $\{z_1, f\} = 0$ para toda función. En otras palabras, el centro del álgebra de Lie no se reduce a las constantes.

- El paréntesis de Poisson es una operación de tipo local. El valor de $\{f, g\}$ en un punto, solo depende de los germenes de f y de g. Esto es así pues el paréntesis es una derivación (en cada argumento). Todo abierto de una variedad de Poisson es también de Poisson.

Definición 6.2 *Llamamos* función de Casimir *a toda función f cuyo paréntesis de Poisson con cualquier otra función sea nulo.*

$$\{f, g\} = 0 \text{ para toda } g \in C^\infty(\mathcal{V})$$

Dos funciones están en involución *si su paréntesis es nulo.*

Las funciones de Casimir son los elementos del centro del álgebra de Lie. En el caso de la geometría simpléctica las únicas funciones de Casimir son las constantes (si la variedad es conexa).

6.2. Campos de Hamilton

Gracias a la regla de Leibniz podremos construir un campo vectorial asociado a una función. De este modo el formalismo hamiltoniano se introduce en las variedades de Poisson.

Definición 6.3 *Sea f una función diferenciable en una variedad de Poisson. Llamamos* campo hamiltoniano *de f y denotamos X_f al que cumple*

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

Gracias a la regla de Leibniz, se prueba que X_f es una derivación del anillo de funciones y por lo tanto un campo diferenciable sobre la variedad.

Si consideramos un álgebra de Lie arbitraria, a cada elemento f del álgebra le corresponde un endomorfismo del álgebra. Este endomorfismo se denota Ad_f y está definido como

$$\mathrm{Ad}_f(g) = [f, g]$$

Por lo tanto, el campo hamiltoniano de f no es más que el endomorfismo Ad_f del álgebra de Lie $C^\infty(\mathcal{V})$.

Proposición 6.1 *La función*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty & \to & \mathrm{Der}(\mathcal{V}) \\ f & \to & X_f \end{array}$$

es un morfismo de álgebras de Lie.

Demostración.

La linealidad es clara. Demostremos que conserva el paréntesis.
Tenemos por una parte

$$X_{\{f,g\}}(h) = \{\{f,g\},h\} = -\{h,\{f,g\}\}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](h) &= X_f X_g(h) - X_g X_f(h) \\ &= X_f(\{g,h\}) - X_g(\{f,h\}) \\ &= \{f,\{g,h\} + \{g,\{h,f\}\} \end{aligned}$$

y concluimos aplicando la identidad de Jacobi en $C^\infty(\mathcal{V})$. □

Corolario 6.2 *El conjunto de campos hamiltonianos forma una subálgebra de Lie.*

6.3. Tensor de Poisson

La estructura de Poisson de una variedad viene inducida por un tensor de orden 2 antisimétrico. Sin embargo, a diferencia de la estructura simpléctica, este tensor no será covariante sino contravariante. Dicho de otra forma, este tensor es un producto tensorial de campos vectoriales y no un producto de formas lineales.

Teorema 6.3 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de Poisson, existe un tensor 2-contravariante ω^2 que verifica que verifica*

$$\omega^2(df, dg) = \{f, g\}$$

El tensor ω^2 recibe el nombre de tensor de Poisson *de la variedad $\mathcal{V}$.*

Demostración.

Veamos primero que el valor de $\{f,g\}$ en el punto x solo depende de los valores de df y dg en ese punto

$$\{f,g\} = X_f(g) = dg(X_f)$$

La parte de dg depende evidentemente solo del valor de dg en el punto x. El campo X_f solo depende de las derivadas parciales de f (trabajando en un abierto coordenado) y por lo tanto solo depende del valor de df. Tomando valor en el punto x se concluye.

Esto prueba su existencia.
Su unicidad es clara, pues en coordenadas, ω^2 debe expresarse

$$\omega^2 = \omega^2(dx_i, dx_j)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \{x_i, x_j\}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

El tensor ω^2 es antisimétrico por serlo el paréntesis. □

- En un dominio coordenado

$$\{f, g\} = \{x_i, x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

  Conociendo los paréntesis de las coordenadas, podemos conocer el paréntesis de cualquier par de funciones. Esto prueba de nuevo que el valor del paréntesis de dos funciones depende solo de los valores de sus diferenciales.

- Dar un tensor 2-contravariante no equivale a dar una estructura de Poisson, pues en general el producto definido como $\omega^2(df, dg)$ no cumple la identidad de Jacobi[1].

- El tensor ω^2 tiene asociada una polaridad. Como el tensor es contravariante, la polaridad en este caso tiene como dominio el fibrado cotangente y como imagen el fibrado tangente. A cada 1-forma la polaridad le permite asociar un campo. En general, la polaridad asociada a una estructura de Poisson no será ni inyectiva ni epiyectiva.

- A df mediante la polaridad asociada le corresponde el campo X_f.

Definición 6.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson y ω^2 el tensor de Poisson. Llamamos rango de $\mathcal{V}$ en el punto x, al rango del tensor $(\omega^2)_x$. Coincide con la dimensión de la imagen del espacio cotangente mediante la polaridad asociada.*

El rango de una variedad de Poisson es necesariamente un número par por ser el rango de un tensor hemisimétrico, y en principio puede variar de punto a punto.

Definición 6.5 *Llamamos* espacio característico *en el punto x y denotamos C_x, al subconjunto de $T_x(\mathcal{V})$ que es la imagen de $T^*_x(\mathcal{V})$ por la polaridad asociada al tensor de Poisson.*

Por la propia definición, el rango coincide con la dimensión del espacio característico.
Si $\mathcal{V}$ es de dimensión par y de rango máximo en todo punto, entonces la polaridad asociada al tensor de Poisson es un isomorfismo. A traves de este isomorfismo podemos construir sobre $\mathcal{V}$ una 2-forma (cuya polaridad es la inversa de la polaridad de ω^2). Se

[1]Si introducimos el paréntesis de Schouten, que es una generalización de la derivada de Lie, la condición para que un tensor ω^2 defina una estructura de Poisson es que $[\omega^2, \omega^2] = 0$, donde los corchetes denotan el paréntesis de Schouten. Para más referencias véase [16].

puede comprobar que esta 2-forma es cerrada. Entonces tenemos una variedad simpléctica. La estructura de Poisson asociada a esta estructura simpléctica coincide con la estructura de partida.

Esto nos permite dar una nueva definición de variedad simpléctica.

Definición 6.6 *Una* variedad simpléctica *es una estructura de Poisson cuyo rango es igual a la dimensión de la variedad en todos los puntos.*

6.4. Morfismo de Poisson

Como toda estructura que se precie, las variedades de Poisson tienen unos morfismos asociados. Recordemos que la definición de imagen inversa en el caso de las funciones cumple

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

Para no recargar la notación notaremos del mismo modo todos los paréntesis de Poisson. El contexto nos inforamará de cual es el que debemos usar en cada caso.

Definición 6.7 *Sea $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos variedades de Poisson. Una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

es un morfismo de Poisson *si $\varphi^*(\{f, g\}) = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}$. Si φ es un difeomorfismo, lo llamaremos* difeomorfismo de Poisson*.*

Un campo X es un morfismo de Poisson infinitesimal *si $X^L(\omega^2) = 0$. También lo llamaremos* campo de Poisson*.*

Si φ es un difeomorfismo de Poisson, entonces φ^{-1} también lo es. El conjunto de todos los difeomorfismos de Poisson de una variedad $\mathcal{V}$ forma un grupo. Lo llamaremos grupo de Poisson de la variedad. Del mismo modo los morfismos infintesimales de Poisson forman un álgebra de Lie.

Si un campo de Poisson genera un grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$, entonces todos los elementos de ese flujo son morfismos de Poisson. Ello se deriva de la fórmula

$$\{f, g\} = \omega^2(df, dg)$$

Proposición 6.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson. X es un campo de Poisson si y solo si cumple*

$$X(\{f, g\}) = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\}$$

Demostración.

Tenemos la fórmula

$$X^L(\omega^2(df, dg)) = X^L(\omega^2)(df, dg) + \omega^2(X(df), dg) + \omega^2(df, X(dg))$$

aplicando la regla de derivación de un producto contraido.

En nuestro caso esto da lugar a

$$X(\{f,g\}) = X^L(\omega^2)(df,dg) + \{X(df),dg\} + \{df,X(dg)\}$$

lo que demuestra la proposición. $\square$

Corolario 6.5 *Todo campo hamiltoniano es un campo de Poisson.*

6.5. Teorema de Darboux

Si la variedad de Poisson tiene rango distinto en cada punto, poco podremos saber sobre su estructura local. Sin embargo si tiene rango constante su estructura local esta perfectamente determinada.

Teorema 6.6 (de Darboux) *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson de rango constante $2n$. Cada punto de la variedad tiene un entorno coordenado, mediante coordenadas locales $\{x_1, \cdots x_n, \xi_1, \cdots \xi_n, z_1, \cdots z_r\}$ de tal forma que en esas coordenadas*

$$\{f,g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$

6.6. Álgebras de Poisson

Sobre $C^\infty(\mathcal{V})$ existen dos estructuras de álgebra. Una asociativa dada por el producto ordinario y otra de Lie, dada por el paréntesis de Poisson. Estas dos estructuras están relacionadas por la fórmula

$$\{f, g\cdot g'\} = \{f,g\}\cdot g' + g\cdot\{f,g'\}$$

Esto nos conduce a la

Definición 6.8 *Sea k un cuerpo. Un* álgebra de Poisson *es un conjunto dotado de las estructuras*

- *Una estructura de álgebra asociativa, denotada por un punto.*
- *Una estructura de álgebra de Lie, denotada con un paréntesis de Poisson (o también con un paréntesis de Lie).*
- *Además se cumple*
$$\{f, g\cdot g'\} = \{f,g\}\cdot g' + g\cdot\{f,g'\}$$

Se debe tener en cuenta el orden, pues en general el álgebra asociativa no tiene por que ser conmutativa. En el caso de las funciones diferenciables si es conmutativa.

Ejemplos.

- Sea $(A, \cdot)$ un álgebra asociativa. Definimos $\{f, g\} = f \cdot g - g \cdot f$. Tenemos una estructura de Poisson en A. En particular, las matrices cuadradas tienen estructura de álgebra de Poisson.
- Los observables de un sistema cuántico también tienen estructura de álgebra de Poisson (aunque hay ciertos problemas con los dominios).

Problemas

55 Una función f es de Casimir si y solo si su campo hamiltoniano X_f es identicamente nulo.

56 Demostrar dada una matriz antisimétrica de orden n, se puede construir en $\mathbb{R}^n$ una estructura de Poisson.

57 Asociando a cada punto x su subespacio característico C_x obtenemos una distribución cuyo rango es el de la estructura simpléctica. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Frobenius a dicha distrubución.

58 Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo de Poisson. Dado un campo hamiltoniano X_f, ver si existe alguna relación entre su imagen directa $\varphi_*(X_f)$ y el campo cuyo hamiltoniano es $\varphi^*(f)$.

7. Mecánica lagrangiana

7.1. Introducción

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, consideramos su fibrado tangente $T(\mathcal{V})$. También lo podemos llamar espacio de fases de velocidades. Tomamos una función diferenciable $L \in C^\infty(T(\mathcal{V}))$, definida sobre el fibrado tangente. Dicha función recibe el nombre de lagrangiano, por analogías de la física clásica.

Fijados estos elementos podemos construir una función del fibrado tangente en el fibrado cotangente de la variedad. Es lo que llamaremos transformación de Legrendre asociada al lagrangiano L.

En muchos casos la transformación de Legendre establece un difeomorfismo (local), lo que permite introducir una estructura simpléctica en el fibrado tangente.

El estudio de las ecuaciones del movimiento, entendiendolas como campos de vectores en el fibrado tangente, es lo que denominamos mecánica lagrangiana. Bajo ciertas hipótesis se puede probar que este enfoque y el enfoque hamiltoniano son equivalentes.

7.2. Derivada en las fibras

Sea $L : T(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $x \in \mathcal{V}$ un punto arbitrario. Los vectores tangentes en ese punto los denotamos v_x. Sea L_x la función L restringida a $T_x(\mathcal{V})$. Esto es

$$\begin{array}{rccl} L_x : & T_x(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{R} \\ & v_x & \to & L_x(v_x) = L(x, v_x) \end{array}$$

La función L_x está definida en un espacio vectorial y dado un punto v_x del espacio vectorial tiene sentido calcular su diferencial $D_{v_x} L_x$. Esta aplicación tiene como dominio el mismo espacio y como imagen $\mathbb{R}$. De este modo podemos considerarla como un elemento del espacio dual, $T_x^*(\mathcal{V})$.

Definición 7.1 *Llamamos* transformación de Legendre *(asociada al lagrangiano L) a la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{L} : & T(\mathcal{V}) & \to & T^*(\mathcal{V}) \\ & v_x & \to & D_{v_x} L_x \end{array}$$

Viendo la aplicación como una derivada tenemos

$$\mathbf{L}(v_x)(v'_x) = \left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} L(v_x + s v'_x)$$

Dicha función transforma vectores tangentes en un punto, en vectores cotangentes en ese mismo punto. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T(\mathcal{V}) \arrow[rr, "\mathbf{L}"] \arrow[dr] & & T^{(}\mathcal{V}) \arrow[dl] \\
& \mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

7.3. Lagrangianos regulares

Definición 7.2 *Un lagrangiano es* regular *si* $\mathbf{L}$ *difeomorfismo local. Un lagrangiano es* hiperregular *si* $\mathbf{L}$ *es un difeomorfismo.*

Todo lagrangiano hiperregular es también regular. Supondremos a partir de ahora que todo lagrangiano es regular.

Definición 7.3 *La* 1*-forma* $\theta_L = \mathbf{L}^*(\theta)$ *se llama* 1-forma de Lagrange*. La* 2 *forma* $\omega_L = \mathbf{L}^*(\omega_2)$ *se llama* 2-forma de Lagrange*.*

Como la diferencial exterior conmuta con la imagen inversa tenemos que $\omega_L = d\theta_L$. En particular, la 2-forma de Lagrange es cerrada.

Esto es válido para todos los lagrangianos. Pero en el caso regular tenemos

Proposición 7.1 *Si el lagrangiano es regular, la forma de Lagrange dota al fibrado tangente de una estructura de variedad simpléctica.*

Demostración.

Ya vimos que la forma era cerrada. Si el lagrangiano es regular, la aplicación tangente en todo punto es un isomorfismo y por lo tanto, punto a punto la forma de Lagrange es no degenerada, debido a que es la imagen por un isomorfismo de una forma no degenerada. □

Si la 2-forma de Lagrange es simpléctica, en cada punto la transformación de Lagrange tiene que tener como diferencial un isomorfismo. De este modo, la transformación de Lagrange será un difeormorsimo local en todo punto.

Esto nos conduce a una definición más clásica de la regularidad de un lagrangiano.

Definición 7.4 *Un lagrangiano es* regular *si la* 2*-forma de Lagrange asociada es una forma simpléctica.*

7.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definición 7.5 *Llamamos* acción *de un lagrangiano a la función*

$$\begin{array}{rccc} A: & T(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{R} \\ & v_x & \to & \mathbf{L}(v_x)(v_x) \end{array}$$

La energía *es la función* $E = A - L$.

Como estamos suponiendo que el lagrangiano es regular, la función energia tiene asociado un campo hamiltoniano, X_E, definido en el fibrado tangente. Llamaremos a ese campo, campo lagrangiano.

A. Variedades de contacto

En los problemas de mecánica dependientes del tiempo, el espacio donde está definido el hamiltoniano es $\mathbb{R}\times T^*(\mathcal{V})$, que es una variedad de dimensión impar. Como tal no puede admitir una estructura simpléctica, pero admite sin embargo una estructura llamada de contacto, que vendrá dada por la 1-forma $dt - \theta$, donde θ es la forma de Liouville. En coordenadas adecuadas esta forma se expresa $dt - \xi_i dx_i$.

Aparte de la importancia que en dinámica tienen las variedades de contacto, también son el marco natural donde se formulan las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en las que aparece explícitamente la función incógnita.

A.1. Subespacio característico

Definición A.1 *Sea α una forma de grado uno definida en un abierto U de la variedad. El* espacio característico *de α en el punto $x \in U$ es*

$$\mathcal{C}_x(\alpha) = \{X_x \in T_x(\mathcal{V}) \text{ tales que } i_{X_x}\alpha_x = 0, \quad i_{X_x}d\alpha_x = 0\}$$

La dimensión del espacio $\mathcal{C}_x(\alpha)$ se llama rango *de la forma α en el punto x. La codimensión de este subespacio es la* clase *de α en x.*

Si a cada punto $x \in U$ le asociamos el espacio $\mathcal{C}_x(\alpha)$ tenemos un subfibrado del fibrado tangente. Este subfibrado se denotará $\mathcal{C}(\alpha)$ y lo llamaremos subfibrado característico de α.

Ejemplos.

- El espacio característico de α en el punto x coincide con la intersección

  $$\mathcal{L}_x = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \cap \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

  El núcleo de una forma lineal es siempre un hiperplano. La dimensión del radical de una forma de grado 2 no es conocida a priori, pero siempre debe ser par.

- A cada subespacio $\mathcal{C}_x$ le corresponde por dualidad un subespacio del espacio cotangente. Denotamos por $\mathcal{C}_x^*$ a dicho subespacio, que son las formas lineales que se anulan sobre el espacio característico. La clase de α en x coincide con la dimensión de $\mathcal{C}_x^*$.

- Sea $\mathcal{V}$ un espacio de fases y θ la forma de Liouville. Como la diferencial de la forma de Liouville es una forma simpléctica, carece de radical y no puede existir ningún vector X_x que cumpla $i_{X_x}d\theta = 0$. Por lo tanto el espacio característico de la forma de Liouville es nulo en todos los puntos.

- Sea ahora la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ con la forma $\alpha = dt - \theta$. La diferencial de esta forma coincide con $d\theta$. En este caso si existen vectores que cumplen $i_{X_x} d\theta = 0$. Estos vectores son $\frac{\partial}{\partial t}$ y sus proporcionales. Pero estos vectores no cumplen $i_{X_x}\alpha = 0$ por lo que de nuevo el espacio característico de α es nulo en todo punto.
- En $\mathbb{R}^3$ con $\alpha = xdy$, el espacio característico en todo punto está generado por $\frac{\partial}{\partial z}$.

Estamos interesados en las formas cuya clase sea la misma en todos los puntos. En el caso de formas de clase constante el subfibrado característico es un verdadero subfibrado diferenciable.

Definición A.2 *Una forma α es* regular *de clase m si α no se anula en ningún punto y es de clase constante m en todo el abierto donde esté definida.*

A.2. Campos característicos

Definición A.3 *Dada una forma de grado uno α, definida en un abierto U, llamamos campos característicos de α a las secciones del fibrado característico.*

Si X es un campo característico, en cada punto del abierto se cumple $i_{X_x}\alpha = 0$ e $i_{X_x} d\alpha = 0$. Globalizando este resultado, los campos característicos son precisamente aquellos que verifican las condiciones

$$i_X\alpha = 0 \qquad i_X d\alpha = 0$$

Proposición A.1 *Un campo es característico si y solo si cumple*

$$i_X\alpha = 0 \qquad X^L\alpha = 0$$

Demostración.

Recordando la fórmula de Cartan

$$X^L = i_X \circ d + d \circ i_X$$

tenemos que $X^L\alpha = 0$ si X es característico y el recíproco es inmediato. □

Tenemos una fórmula análoga a la de Cartan, que relaciona la contracción interior con el paréntesis de Lie.

$$[X^L, i_Y] = i_{[X,Y]}$$

También es conocida la siguiente relación

$$[X^L, Y^L] = [X, Y]^L$$

que junto con la anterior permite demostrar la

Proposición A.2 *El conjunto de campos característicos de α es un álgebra de Lie.*

Aplicando el teorema de Frobenius, el subfibrado característico de α es integrable

A.3. Estructuras de contacto

De ahora en adelante $\mathcal{V}$ será una variedad de dimensión impar $2n+1$.

Definición A.4 *Una estructura de contacto* global *en $\mathcal{V}$ es una forma de primer grado α, regular de clase máxima, $2n+1$, definida en todo $\mathcal{V}$. Al par $(\mathcal{V}, \alpha)$ se le llama* variedad de contacto, *y α es la* forma de contacto.

Por el teorema de Darboux siempre es posible encontrar coordenadas locales (t, x_i, ξ_i) que cumplan $\alpha = dt - \xi_i dx_i$. Este tipo de coordenadas se llaman coordenadas canónicas (de contacto). En el caso $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ con $\alpha = dt - \theta$ podemos asegurar la existencia de coordenadas canónicas sin recurrir al teorema de Darboux.

La diferencial de la forma de contacto $d\alpha$ no es una forma simpléctica. Su rango es 2n y su radical es de dimensión 1 en todos los puntos. En cada punto x el subespacio característico es nulo y los subespacios $\mathrm{Ker}(\alpha_x)$ y $\mathrm{Rad}(d\alpha_x)$ tienen intersección nula. Como la suma de sus dimensiones es $2n+1$ se tiene la descomposición en suma directa

$$T_x(\mathcal{V}) = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \oplus \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

Utilizando el teorema de Darboux podemos dar una nueva definición de estructura de contacto.

Definición A.5 *Una* estructura de contacto *global en $\mathcal{V}$ es una forma de grado uno α que cumple*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0 \text{ en todo punto}$$

Demostración.

Utilizando las formas normales, la única posibilidad de que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ es que α sea de clase $2n+1$. □

Una forma de contacto α determina un subfibrado $\mathcal{P}$ de $T^*(\mathcal{V})$ de rango 1, asociando a cada punto x el subespacio vectorial generado por α_x.

$$\mathcal{P}_x = <\alpha_x>$$

Si α' es proporcional a α, $\alpha' = f\alpha$ con f no nula en ningún punto, el fibrado asociado a α' coincide con el fibrado asociado a α.

Las estructuras de contacto generales se definen como subfibrados de rango 1 del fibrado cotangente y que localmente están generados por formas regulares de clase máxima. Se hace de este modo, pues la existencia de una forma de contacto global impone restricciones topológicas a la variedad que se evitan de esta forma. De este modo dos formas de Pfaff proporcionales definen la misma estructura de contacto.

Corolario A.3 *Toda variedad de contacto global es orientable.*

Demostración.

Sabemos que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ en todos los puntos y por lo tanto será una forma de volumen. □

A.4. Distribuciones de hiperplanos

Dualizando el subfibrado $\mathcal{P}$, obtenemos que a cada punto x le podemos hacer corresponder un hiperplano del espacio tangente, precisamente el núcleo de una cualquiera de las formas de $\mathcal{P}_x$. Esta es la interpretación geométrica de una estructura de contacto: una estructura de contacto en $\mathcal{V}$ es una distribución de hiperplanos. Sin embargo el recíproco no tiene por qué ser cierto puesto a una distribución de hiperplanos le corresponde siempre una forma de grado uno, pero no podemos asegurar que esta sea de clase máxima.

Definición A.6 *Una* distribución de hiperplanos *H definida en un abierto U, es una función que asigna a cada punto $x \in U$ un hiperplano tangente en dicho punto*

$$H : x \to H_x \subset T_x(\mathcal{V})$$

Una forma α define localmente *una distribución de hiperplanos si $\mathrm{Ker}(\alpha_x) = H_x$ en todos los puntos de un abierto.*

Si α define una distribución de hiperplanos, todas las formas proporcionales también lo definen.

Definición A.7 *Una distribución de hiperplanos H es* diferenciable *si está definida en un entorno de cada punto por una forma de primer grado.*

En principio la forma de Pfaff que define la distribución de hiperplano no está definida globalmente.

Si α define una distribución de hiperplanos, tenemos que $d\alpha$ es una 2-forma definida localmente. Podemos restringir la forma $d\alpha$ al hiperplano H_x y obtenemos de este modo una métrica antisimétrica en cada hiperplano. En el caso de las variedades de contacto está métrica no tiene radical.

Definición A.8 *Una* estructura de contacto *en $\mathcal{V}$ es una distribución diferenciable de hiperplanos que induce una métrica simpléctica en cada hiperplano.*

En principio parece que la definición depende de la forma α particular que hayamos tomado para definir la distribución de hiperplanos. Pero si tomamos otra, tiene que ser proporcional y se cumple

$$d(\alpha') = d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

Restringiendo a cada hiperplano $d\alpha'_x = f(x) d\alpha_x$ puesto que el primer término es nulo y las formas inducidas son proporcionales.

Proposición A.4 *Las dos definiciones de estructuras de contacto coinciden.*

Demostración.

Si α es una forma de clase $2n+1$, podemos ponerla en forma normal. En este caso es claro que en cada punto se tiene

$$T_x(\mathcal{V}) = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \oplus \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

y la métrica restringida al hiperplano es simpléctica.

Recíprocamente, si se tiene una descomposición del espacio tangente en forma de suma directa como la anteriormente indicada, el espacio característico en cada punto es nulo y la clase de la forma es máxima. $\square$

A.5. Variedad de elementos de contacto

Este ejemplo es que motivó el estudio y la notación de las estructuras de contacto. La siguiente discusión asocia a una variedad simpléctica exacta (el espacio de fases), una variedad de contacto, cuya dimensión es una unidad menor.

Definición A.9 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Un* elemento de contacto *es un par (x, H_x) formado por un punto $x \in \mathcal{V}$ y un hiperplano H_x tangente en dicho punto.*

Dado un elemento de contacto (x, H_x), existe una forma, α_x, que cumple $\mathrm{Ker}(\alpha_x) = H_x$. Esta forma no es única, puesto que cualquier forma proporcional cumple también la condición.

Dado un elemento de contacto (x, H_x), podemos pensar en él como un par (x, H_x^0) donde H_x^0 es el subespacio unidimensional de $T_x^*(\mathcal{V})$ obtenido por dualidad. La unión de todos los elementos de contacto de una variedad $\mathcal{V}$ se denota $\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V}))$. Entonces

$$\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V})) = \{(x, H_x) \text{ tales que } x \in \mathcal{V}\}$$

Este conjunto tiene una estructura fibrada sobre $\mathcal{V}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{P}(T^*(\mathcal{V})) & \to & \mathcal{V} \\ & (x, H_x) & \to & x \end{array}$$

La fibra de cada punto está formada por todos los hiperplanos tangentes en el punto. Por dualidad a cada hiperplano le corresponde un subespacio unidimensional del espacio tangente. Con esta identificación en mente, la fibra de un punto x se identifica con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(T_x^*(\mathcal{V}))$ del espacio dual, de donde proviene la notación.

El conjunto $\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V}))$ tiene una estructura de variedad de dimensión $2n-1$ puesto que la fibra tiene dimensión $n-1$.

Sobre la variedad que hemos construido existe un estructura de contacto canónica definida por una distribución de hiperplanos $\mathcal{H}$. Dado un punto $p = (x, H_x)$ llamamos hiperplano de contacto $\mathcal{H}_p$ a los vectores tangentes X en p que cumplan $\pi'(X) \in H_x$. Dicho de otro modo. Dado un punto tenemos una aplicación lineal $\pi' : T_p(\mathbb{P}(T^*\mathcal{V})) \to T_x(\mathcal{V})$.

La antiimagen del hiperplano H_x será un hiperplano tangente $\mathcal{H}_p$ en el punto p puesto que la aplicación lineal es epiyectiva.

Tomando coordenadas en el espacio proyectivo,de modo que la primera coordenada sea 1, se comprueba que en efecto está distribución de hiperplanos viene definida por una forma de clase máxima y que por lo tanto hemos construido una variedad de contacto.

A.6. Transformaciones de contacto

Definición A.10 *Sea $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ variedades de contacto globales de la misma dimensión. Una* transformación de contacto *es un difeomorfismo*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

que cumple $\varphi^*(\alpha') = f\alpha$, donde f es una función diferenciable y no nula en ningún punto.

Si H y H' son las distribuciones de hiperplanos que definen la estructura de contacto, una transformación de contacto transforma dicha distribuciones

$$\varphi'(H_x) = H'_{\varphi(x)}$$

que es otra posible definición de las transformaciones de contacto, útil cuando no existe globlamente la forma de contacto.

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son los fibrados asociados y φ es una transformación de contacto, φ transforma un fibrado en el otro, en el siguiente sentido

$$\varphi'_x(\mathcal{P}_x) = \mathcal{P}'_{\varphi(x)}$$

o dicho de otro modo, transforma secciones de $\mathcal{P}$ en secciones de $\mathcal{P}'$.

El conjunto de todas las transformaciones de contacto de una misma variedad forma un grupo, que llamaremos grupo de contacto.

Definición A.11 *Una* transformación infinitesimal de contacto *es un campo vectorial que cumple $X^L\alpha = \rho\alpha$, donde ρ es una función diferenciable que puede tener ceros.*

Si X genera un grupo uniparamétrico, cada elemento es una transformación de contacto y recíprocamente. El conjunto de todas las transformaciones infinitesimales de contacto forma un álgebra de Lie.

Definición A.12 *Las* transformaciones de Pfaff *son los difeomorfismos que conservan la forma de contacto, esto es $\varphi^*\alpha = \alpha$. Los campos que cumplen $X^L\alpha = 0$ son la versión infinitesimal de las transformaciones de Pfaff.*

A.7. Campo de Reeb

Definiremos ahora un campo asociado a la variedad de contacto, que será la generalización del campo $\frac{\partial}{\partial t}$ en la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$.

Proposición A.5 *En una variedad de contacto existe un único campo R que cumple:*

1.- $i_R\alpha = 1$

2.- $i_R d\alpha = 0$

Demostración.

Consideremos coordenadas canónicas locales.

Si se cumple $i_R d\alpha = 0$, necesarimente $R = f\frac{\partial}{\partial t}$ puesto que radical de la métrica $d\alpha$ es unidimensional.

De la primera condición obtenemos que necesariamente $f = 1$.

Esto prueba su existencia y unicidad en coordenadas locales y por lo tanto también su existencia y unicidad en coordenadas globales. □

Definición A.13 *El campo construido en la proposición anterior se llama* campo de Reeb*.*

Corolario A.6 *El campo de Reeb conserva la forma de contacto.*

Demostración.

$R^L(\alpha) = di_R\alpha + i_R(d\alpha) = 0$. □

Corolario A.7 *El campo de Reeb nunca es nulo y además cumple*

$$i_R(\alpha \wedge (d\alpha)^n) = (d\alpha)^n$$

Demostración.

Nunca es nulo pues coincide localmente con $\frac{\partial}{\partial t}$. La fórmula se deriva de las dos propiedades que definen al campo de Reeb. □

Ejemplos.

- En la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ con la forma de contacto $\alpha = dt - \theta$, el campo de Reeb es precisamente $R = \frac{\partial}{\partial t}$, puesto que cumple claramente las dos propiedades.
- En $\mathbb{R}^3$ con la forma $\alpha = xdy + dz$ el campo de Reeb es $\frac{\partial}{\partial z}$.

- Consideremos la esfera S^{2n-1}, de dimensión $2n-1$. La esfera es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$ en el que introducimos coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. La esfera junto con la forma $\alpha = \sum x_i dy_i - y_i dx_i$ es una variedad de contacto. El campo de Reeb es, salvo un factor
$$R = x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

En el caso de la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$, el campo de Reeb es globalmente integrable, cosa que en general no ocurre. A cada punto del espacio de fases se le asocia un curva integral maximal. En la variedad definimos una relación de equivalencia, diciendo que dos puntos son equivalentes si pertenecen a la misma curva integral. El conjunto cociente es entonces $T^*(\mathcal{V})$. Denotando por π la proyección en el espacio cociente, tenemos que la estructura simpléctica ω_2 del espacio de fases cumple que $\pi^*(\omega_2) = d\alpha$ donde π es la proyeción canónica de la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ en el segundo factor.

A.8. Variedad simpléctica asociada

Sea $(\mathcal{V}, \alpha)$ una variedad de contacto de dimensión $2n+1$. $\mathcal{P}$ denotará el subfibrado del espacio de fases de esta variedad. Vamos a asociar a cada estructura de contacto $(\mathcal{V}, \alpha)$ una variedad simpléctica exacta $(\mathcal{V}_S, \alpha_S)$ y a cada transformación de contacto $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ una transformación canónica $\varphi_S : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}'_S$. Tendremos de este modo definido un functor de la categoría de variedades de contacto en la categoría de variedades simplécticas exactas. Muchos problemas de las variedades de contacto se pueden reducir a problemas sobre variedades simplécticas.

Mediante $\mathcal{V}_S$ denotamos el conjunto
$$\mathcal{V}_S = \{(x, \omega_x) \text{ donde } x \in \mathcal{V}, \omega_x \in \mathcal{P}_x, \omega_x \neq 0\}$$
El conjunto $\mathcal{V}_S$ tiene una estructura fibrada sobre $\mathcal{V}$
$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{V}_S & \to & \mathcal{V} \\ & (x, \omega_x) & \to & x \end{array}$$
La fibra típica es $\mathbb{R} - 0$.

Introduzcamos una estructura diferenciable en el conjunto $\mathcal{V}_S$.

Sea $U \subset \mathcal{V}$ un abierto coordenado y (t, x_i, ξ_i) coordenadas canónicas en dicho abierto. Si (x, ω_x) es un punto de $\pi^{-1}(U)$, le asociamos los $2n+2$ números
$$(t(x), x_i(x), \xi_i(x), \lambda)$$
donde λ es el único número real que cumple $\lambda \alpha_x = \omega_x$.

Admitamos que efectivamente los cambios de coordenadas son de clase $\mathbb{C}^\infty$. Introduciendo en $\mathcal{V}_S$ la topología menos fina que hace que las coordenadas sean continuas, y aplicando argumentos estandar de geometría de variedades, dotamos a $\mathcal{V}_S$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n+2$. La proyección canónica $\pi : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}$ es una sumersión epiyectiva, que es un fibrado diferenciable.

Como el conjunto $\mathcal{V}_S$ "está" constituido por formas algebraicas de grado uno, podemos construir una forma diferencial

$$(\alpha_S)_{(x,\omega_x)}(X) = \omega_x(\pi'(X))$$

Como vemos la construcción de la forma α_S es análoga a la construcción de la forma de Liouville en el espacio de fases.

Expresando la forma que acabamos de construir en coordenadas tenemos

$$\alpha_S = \lambda dt - \lambda\xi_1 dx_1 - \cdots - \lambda\xi_n dx_n = \lambda\pi^*(\alpha)$$

lo que prueba que α_S es de clase máxima $2n+2$. De este modo tenemos una estructura de variedad simpléctica homogénea en $\mathcal{V}_S$.

Definición A.14 *La variedad* $(\mathcal{V}_S, \alpha_S)$*, es la* variedad simpléctica asociada *a la variedad de contacto* $(\mathcal{V}, \alpha)$.

Sin embargo las coordenadas que hemos introducido no son canónicas, pero esto se soluciona fácilmente definiendo $\bar{\xi}_i = -\lambda\xi_i$. Ahora

$$(\lambda, x_1, \ldots, x_n, t, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$$

ya forman un sistema de coordenadas canónicas para la estructura simpléctica. Si además definimos $\lambda = \xi_0$ y $t = x_0$ la estructura de las variables canónicas es mucho más simétrica.

Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ una transformación de contacto. Esta función se extiende de modo natural a una aplicación biunívoca

$$\varphi_S : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}'_S$$

mediante la fórmula $\varphi_S(x, \omega_x) = (\varphi(x), (\varphi^{-1})^*(\omega_x))$. La aplicación así definida es diferenciable (pruébese en coordenadas) y además es una transformación canónica homogénea

$$\varphi_S^*(\alpha'_S) = \alpha_S$$

Esta función que acabamos de construir hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_S \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[d, "\pi"'] & V'_S \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{V}' \end{tikzcd}$$

Del mismo modo que "subimos" a la variedad $\mathcal{V}_S$ las transformaciones de contacto, podemos subir las transformaciones infinitesimales de contacto X que generen un grupo global. A pesar de que estas campos no generen grupos uniparamétricos globales, también existen métodos unívocos para subir campos X que sean transformaciones infinitesimales de contacto. La subida del campo X se denota X_S. Naturalmente X_S conserva la forma α_S.

Como en el caso del fibrado cotangente tenemos las propiedades:

- $(\varphi \circ \phi)_S = \varphi_S \circ \phi_S$.
- $(\varphi_S)^{-1} = (\varphi^{-1})_S$.
- $X \to X_S$ es un morfismo de álgebras de Lie inyectivo.

A.9. Geometría de las 2-formas cerradas

Muchas veces, en mecánica, debemos considerar la forma simpléctica sobre una subvariedad. Naturalmente dicha forma, en general, no será simpléctica sobre la subvariedad.

En el estudio de las variedades de contacto, ciertas construcciones dependen solamente de la 2-forma $d\alpha$, que tiene radical.

Ejemplos como los anteriores nos inducen a estudiar la estructura de las 2-formas cerradas, del mismo modo que en la sección A.1 se hizo con las formas de Pfaff.

Definición A.15 *Dada una 2-forma ω, el* espacio característico *de ω en el punto x es*

$$\mathcal{L}_x = \operatorname{rad} \omega_x$$

El subfibrado $\mathcal{L}$ del fibrado tangente que en cada punto coincide con el espacio característico, se denomina subfibrado característico.

Un campo vectorial X es característico *si $X_x \in \mathcal{L}_x$ para todo x. Esto es equivalente a que $i_X \omega = 0$.*

En el caso en que la 2-forma ω tenga rango constante, el subfibrado $\mathcal{L}$ es diferenciable.

El interés de las formas cerradas se debe a la siguiente proposición.

Proposición A.8 *Sea ω una 2-forma cerrada y de rango constante. El subfibrado característico es integrable.*

Demostración.

Según el teorema de integrabilidad de Frobenius, basta con demostrar que el corchete de dos campos característicos es de nuevo un campo característico. Sean X e Y dos campos característicos

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= X^L i_Y \omega - i_Y X^L \omega \\ &= -i_Y X^L \omega \\ &= i_Y(i_X D\omega + d i_X \omega) = 0 \end{aligned}$$

por lo que $[X, Y]$ es un campo característico. $\square$

Veamos ahora tipos canónicos de las 2-formas cerradas.

Teorema A.9 (Darboux) *Sea ω una 2-forma cerrada y de rango constante $2n$. En un entorno de cada punto existen coordenadas*

$$(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n, r_1, \dots, r_k)$$

tales que

$$\omega = dx_i \wedge d\xi_i$$

Demostración.

Como ω es cerrada, es localmente exacta. Existe una forma de Pfaff α tal que $d\alpha = \omega$. Necesariamente α es de clase $2n$ o de clase $2n + 1$. En cualquiera de los dos casos las coordenadas que llevan a α a la forma canónica cumplen el teorema. □

Estamos interesados en las formas definidas sobre variedades de dimensión impar $2n+1$ y cuyo rango sea el máximo posible, que en este caso es $2n$. El espacio característico de estas formas es unidimensional. Basta con dar un campo característico no nulo para conocer todo el espacio característico.

Por analogía con el caso de las variedades de contacto, denotaremos por

$$(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n, t)$$

a las coordenadas que llevan a ω a la forma canónica.

Daremos varios ejemplos donde se produce esta situación.

Ejemplos.

- Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y h un hamiltoniano. Sea λ un valor regular del hamiltoniano. La hipersuperficie $f = \lambda$ la denotamos Σ_λ. La forma simpléctica ω_2 restringida a Σ_λ es de rango máximo. Consideramos ahora el campo hamiltoniano X_h sobre la hipersuperficie. Resulta que este campo es característico y que por lo tanto genera el subfibrado característico, ya que al ser λ un valor regular dicho campo es no nulo en la hipersuperficie.

- Sea ahora la variedad $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ con la forma simpléctica ω_2 de la variedad simpléctica. En la variedad producto dicha forma no es simpléctica sino que posee radical. El campo $\frac{\partial}{\partial t}$ es característico y al ser no nulo genera el subfibrado característico.

- Dada la variedad $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$, consideramos un hamiltoniano dependiente del tiempo, $h \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{V})$. Asociado a este hamiltoniano tenemos la 2-forma

  $$\omega_h = \omega_2 + dh \wedge dt$$

  que es de rango $2n$ y cerrada.

  Sea $\bar{X}_h = \frac{\partial}{\partial t} + X_h$ un campo definido en la variedad producto. Este campo es carasterístico de ω_h.

Aplicando el teorema de Cartan de reducción de un sistema exterior, sabemos que si α es de clase m, entonces α se puede expresar localmente en función de m coordenadas y de sus diferenciales. El teorema de Darboux afina más esta situación.

Teorema A.10 (Darboux) *Sea α regular de clase m y $x \in \mathcal{V}$ un punto arbitrario.*

1.- Si $m = 2k+1$, existen $2k+1$ funciones $(t, x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, \xi_k)$, independientes funcionalmente, que cumplen

$$\alpha = dt - \xi_1 dx_1 - \cdots - \xi_k dx_k$$

en un entorno del punto x.

2.- Si $m = 2k$, existen $2k$ funciones $(x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, x_k)$, funcionalmente independientes en un entorno de x tales que

$$\alpha = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_k dx_k$$

Demostración.

Puede hallarse en el libro de Muñoz o en el de Godbillon. □

El teorema anterior clasifica de modo total las formas de Pfaff de clase constante. Hemos encontrado las tipos canónicos locales de las formas de Pfaff.

Corolario A.11 *Si α es clase $2k$ o de clase $2k+1$ entonces $d\alpha$ es una forma de segundo grado cuyo rango es $2k$.*

Demostración.

Utilizando las formas normales tenemos que en los dos casos

$$d\alpha = d\xi_1 \wedge dx_1 + \cdots + d\xi_k \wedge dx_k$$

lo que prueba que la diferencial tiene rango $2k$. □

Definición A.16 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Un* elemento de contacto *es un par (x, H_x) formado por un punto $x \in \mathcal{V}$ y un hiperplano H_x tangente en dicho punto.*

Dado un elemento de contacto (x, H_x), existe una forma de Pfaff, α_x, que cumple que $\mathrm{Ker}(\alpha_x) = H_x$. Esta forma no es única, puesto que cualquier forma proporcional cumple también la condición.

B. Teorema de Darboux

Existen básicamente dos tipos de demostraciones del teorema de Darboux. La más clásica hace uso de la teoría de los sistemas exteriores. Se proponen ciertas ecuaciones diferenciales y a través de sus soluciones se construyen las coordenadas canónicas.

El otro tipo de demostración, cuyos fundamentos se deben a Moser y a Weistein, utiliza otra estrategia. Se basa en introducir en la variedad otra forma simpléctica ω_2' y junto con ella un conjunto de formas simplécticas ω_t que las unan. Posteriormente se demuestra que todas las formas ω_t son simplectomorfas. Este tipo de razonamiento es útil en otros desarrollos de la geometría simpléctica.

Necesitamos unos conceptos preliminares sobre las ecuaciones diferenciales.

B.1. Líquidos

Consideremos un subconjunto "rígido" $\mathcal{V}$ del espacio euclídeo. Este conjunto estará lleno de un líquido incompresible. Aunque no es necesario, fijemos por convenio un instante en el que consideremos que el tiempo t es cero.

Dado un instante de tiempo t, la partícula que se encontraba en el punto x pasa a estar en el punto x_t. Asignando a cada punto x de $\mathcal{V}$ el punto x_t donde se encuentra la misma partícula al cabo de un tiempo t, tenemos definido una aplicación

$$\rho_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

La aplicación será inyectiva, puesto que si dos partículas ocupaban posiciones distintas x_1 y x_2 en el instante $t = 0$, en el instante t también deben ocupar lugares distintos.

Como el líquido es incompresible, en todo momento el conjunto $\mathcal{V}$ está lleno de líquido. Dado un punto x de $\mathcal{V}$, la partícula que ahora se encuentra en x, debía encontrarse hace un tiempo t en algún lugar de $\mathcal{V}$. Este razonamiento prueba que la aplicación ρ_t debe ser epiyectiva y en consecuencia también debe ser biunívoca. Además $\rho_0 = \mathrm{Id}$ por construcción.

De este modo podemos definir una función

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R} \times \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & (t, x) & \to & x_t = \rho_t(x) \end{array}$$

Si fijamos t, tenemos definida $\rho_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que debe ser una aplicación biunívoca. Si fijamos x tenemos la función

$$\begin{array}{rccc} \rho_x : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{V} \\ & t & \to & x_t \end{array}$$

que describe la trayectoria de la partícula que en el instante $t = 0$ se encontraba en el punto x.

En cada instante de tiempo, la partícula que circula por el punto $x \in \mathcal{V}$ tiene una cierta velocidad. Como esto ocurre en todos los puntos, para cada tiempo t tenemos definido un campo vectorial X_t construido con las velocidades de las partículas.

Para calcular el vector velocidad en el punto x y en instante t, tomamos la linea que describe la trayectoria de la partícula y calculamos su velocidad

$$X_t(x) = \frac{d\rho_s(q)}{ds} |_{s=t} \text{ donde } q = \rho_t^{-1}(x)$$

El punto q es la partícula que en el instante t pasa por el punto x.

Lo normal es que este campo cambie con el tiempo. En el caso en que esto no ocurra, diremos que el líquido es estacionario y en todo momento el campo de velocidades es X. Como bien sabemos, en este caso se tiene $\rho_t \rho_s = \rho_{t+s}$ y estamos en presencia de un grupo uniparamétrico.

B.2. Isotopías y campos dependientes del tiempo

Definición B.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Una* isotopía *es una función*

$$\rho : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \to \mathcal{V}$$

que cumple:

- *La aplicación es diferenciable.*
- *ρ_t es un difeomorfismo de $\mathcal{V}$ para todo t.*
- *$\rho_0 = \mathrm{Id}$.*

El concepto de isotopía es la formulación matemática del movimiento de un fluido incompresible.

Definición B.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Un* campo dependiente del tiempo *es una aplicación diferenciable*

$$X : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \to T(\mathcal{V})$$

que cumple $X(x,t) \in T_x(\mathcal{V})$.

Una curva integral *es una aplicación $c : (a,b) \to \mathcal{V}$ que verifica la ecuación diferencial $c'(t) = X(c(t),t)$.*

Fijada la variable t, tendremos una sección del fibrado tangente que denotaremos X_t. De esta forma un campo dependiente del tiempo se puede entender como una colección de campos “normales” parametrizada por el tiempo.

En coordenadas, un campo dependiente del tiempo es una combinación lineal de los campos coordenados, pero donde las funciones dependen de las coordenadas y del tiempo.

$$X = f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Sumandole a esta expresión la derivada parcial respecto al tiempo, tendremos un campo vectorial “normal”, pero definido en la variedad $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$. Denotaremos dicho campo mediante $\tilde{X}$.

$$\tilde{X} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Esta defnición se puede hacer de un modo intrínseco. Para ello recordemos que $T(\mathcal{V} \times \mathbb{R}) = T(\mathcal{V}) \times T(\mathbb{R}) = T(\mathcal{V}) \times \mathbb{R}^2$

Con esta notación, el campo $\tilde{X}$ es la sección

$$\begin{array}{rccc} \tilde{X}: & \mathcal{V} \times \mathbb{R} & \to & T(\mathcal{V}) \times \mathbb{R}^2 \\ & (x,t) & \to & (X(t,x),(t,1)) \end{array}$$

El campo $\tilde{X}$ se llama suspensión del campo dependiente del tiempo X_t

A cada isotopía le podemos asignar un campo dependiente del tiempo mediante la fórmula ya conocida

$$X_t(x) = \frac{d\rho_s(q)}{ds}\,|_{s=t} \;\text{ donde } q = \rho_t^{-1}(x)$$

El problema de encontrar una isotopía que cumpla esto para un campo dependiente del tiempo es un problema de ecuaciones diferenciales y no tiene siempre solución global, del mismo modo que no tiene solución global el problema de integración de un campo vectorial que no dependa del tiempo.

Recordemos que si la variedad es compacta cualquier campo vectorial genera un grupo uniparamétrico global. Aunque no estemos en una variedad compacta, si el soporte del campo es compacto, también genera un grupo global.

En general, dada una variedad arbitraria y un campo vectorial X lo más que se puede conseguir es un grupo uniparamétrico global, que no estará definido ni para todo punto, ni para todo tiempo.

Utilizando la suspensión de un campo e integrando dicho campo podemos afirmar (ver [1, 15] para los detalles):

- Si la variedad es compacta todo campo dependiente del tiempo genera una isotopía global.
- Si todos los campos X_t tienen soporte compacto, se puede encontrar también una isotopía global.

- Si para algún punto se tiene $X_t(x_0) = 0$ para todo t, entonces existe un entorno U de x_0 y una familia de difeomorfismo locales $\rho_t : U \to \mathcal{V}$ definidas para todos los valores de $t \in [0, 1]$. Dichas aplicaciones cumplen la ecuación diferencial

  $$\frac{d}{dt}(\rho_t(x)) = X_t(\rho_t(x))$$

  y verifican $\rho_t(x_0) = x_0$.

  Esto que hemos definido no es otra cosa que una isotopía local.

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Addison Wesley, 1978. 4.3, B.2

[2] V. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Math. 60, Springer-Verlag, New York, 1978. 3.4, 4.5

[3] E. Artin. *Álgebra geométrica*. Limusa, 1992.

[4] R. L. Bishop and S. I. Goldbert. *Tensor analysis on manifolds*. Dover, 1981.

[5] E. Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris, Hermman, 1922.

[6] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*. Internet, 2000. 3.4, 4.5

[7] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical science*. Academic Press, 1963.

[8] C. Godbillon. *Geometría diferencial y mecánica análitica*.

[9] Gotay. *The symplectization of science*. Internet, 1992.

[10] H. Hofer. *Hamiltonian dynamics, variational principles and symplectic invariants*. Internet.

[11] Isham. *Modern differential geometry for physicists*. World Scientific, 1999.

[12] P. E. Crouch J. Baillieul, A. M. Bloch and J. E. Marsden. *Mechanics, control, and variational principles*. Internet, 1998.

[13] A. A. Kirillov. *Elements of the theory of representations*. Grundlehren Math. Wiss. Springer-Verlag., 1976.

[14] J. P. Ortega Lahuerta. *Symmetry, reduction and stability in hamiltonian systems*. Internet, 1998.

[15] E. Lerman. *Symplectic geometry and hamiltonian systems*. Internet. B.2

[16] André Lichnerowicz. New geometrical dynamics. 1

[17] J. Marsden and T. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems*. Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1994.

[18] J. Marsden and T. Ratiu. *Mechanics and symmetry. Reduction theory.* Internet, 1998.

[19] J. Milnor. *Morse theory.* Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton,, 1963.

[20] A. Mishchenko and A. Fomenko. *A course of differential geometry and topology.* Editorial MIR, 1988.

[21] Jesús Muñoz. *Ecuaciones diferenciales I.* Universidad de Salamanca. 3.5

[22] Jesús Muñoz. Mecánica clásica.

[23] B. Parissé. *Cours de geométrie différentiel et symplectique.* Internet, 1995.

[24] Pham Mau Quam. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables.* Dunod, 1969.

[25] J. Marsen R. Abraham and T. Ratiu. *Manifolds, tensors, analysis, and applications.* Internet, 2000.

[26] D. Hernández Ruipérez. *Álgebra lineal.* Universidad de Salamanca, 1987.

[27] B. F. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge Univ. Press, 1980.

[28] Segal. *Symplectic manifolds and quantization.* Internet.

[29] J. M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.

[30] S. Sternberg. *Lectures on differential geometry.* New York, Prentice Hall, 1964.

[31] A. Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds.* Regional Conference Series in Mathematics 29, Amer. Math. Soc., Providence,, 1977.

[32] C. Woodward. *Notes on symplectic geometry, and geometric quantization.* Internet, 2000.

Índice alfabético

Historia

1.0.0 - 23 de noviembre de 2003

- Primera versión pública

Creative Commons Deed

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 1.0: Key License Terms

Attribution. The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees must give the original author credit.

Noncommercial. The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees may not use the work for commercial purposes – unless they get the licensor's permission.

Share Alike. The licensor permits others to distribute derivative works only under a license identical to the one that governs the licensor's work.

Whoever has associated this Commons Deed with their copyrighted work licenses his or her work to you on the terms of the Creative Commons License found here: Legal Code (the full license)

This is not a license. It is simply a handy reference for understanding the Legal Code (the full license) - it is a human-readable expression of some of its key terms. Think of it as the user-friendly interface to the Legal Code beneath. This Deed itself has no legal value, and its contents do not appear in the actual license.

Creative Commons is not a law firm and does not provide legal services. Distributing of, displaying of, or linking to this Commons Deed does not create an attorney-client relationship.

Learn how to distribute your work using this license

Manifiesto de Alqua

Origen y metas del proyecto

En 1999 fundamos el proyecto Alqua con el objetivo de promover la creación de un fondo de documentos libres de carácter científico que permita a cualquiera aprender con libertad.

Al constatar la duplicación de esfuerzos en la preparación de materiales didácticos para la física y con el deseo de compartir nuestros conocimientos, nos inspiramos en los principios de libertad que rigen el movimiento del software libre para establecer aquéllos de Alqua. Primero pensamos que lo que escribiésemos debería poder disfrutarse sin merma de libertad por las personas interesadas, y más tarde decidimos organizar nuestros esfuerzos para ayudar a otras personas que compartían nuestra visión a difundir sus saberes mediante un esfuerzo cooperativo.

Para hacer efectivos dichos principios decidimos que los documentos publicados deben ser libres en un sentido amplio: pueden reproducirse y distribuirse (gratuitamente o no, es irrelevante) pero también pueden modificarse y usarse como base para otros trabajos. A fin de evitar que estas libertades del lector-autor se restrinjan posteriormente, los documentos contienen una licencia que explica los derechos que posee y estipula que nadie que distribuya el documento, modificado o no, puede hacerlo de modo no libre.

Las ventajas de los documentos libres

Actualmente es ilegal compartir o modificar la mayoría del conocimiento científico en fuentes impresas, que suelen ser inaccesibles para la mayoría de los estudiantes y bibliotecas del mundo en virtud de su precio y se actualizan con poca frecuencia debido a su sistema de distribución tradicional.

En este contexto los documentos libres presentan ciertas ventajas.

Por una parte, en algunas disciplinas los documentos libres permiten facilitar el establecimiento de un sistema de mérito reduciendo las barreras de precio y disponibilidad. El modelo de desarrollo libre para la ciencia se apoya sobre las libertades de distribución y modificación. Éstas se ven favorecidas por el medio digital, así como por la concepción del conocimiento como un patrimonio comunitario. Todo lo anterior permite reducir el coste del documento a una cantidad marginal y anima a que lo mejor se combine con lo mejor para producir un resultado excelente a la vez que actualizado.

Por otra parte, en casos donde la evaluación del mérito es más subjetiva, los documentos libres pueden aportar una base sobre la que elaborar con un menor esfuerzo diferentes perspectivas doctrinales o estéticas, mutaciones, iteraciones y apuestas que incentivan la creación como un aspecto más del disfrute de la obra.

En suma, los documentos libres fomentan un acceso a la cultura más justo y completo. Para algunos dominios del conocimiento científico el proceso de desarrollo libre facilita la recombinación, lo que permite la producción de obras muy sofisticadas y completas mientras que en otros ámbitos facilita la difusión de perspectivas plurales y la experimentación creativa.

Una nueva dinámica de creación y aprendizaje

Algunas personas que hemos conocido están interesadas por este modelo de colaboración, pero se preguntan qué clase de control tienen sobre sus documentos libres. La respuesta es sencilla: la licencia está diseñada de modo que a cada cual se le atribuya aquello de lo que es responsable y nada más. Para ello, se incluye en el documento una sección en la que se explica quién hizo qué y cuándo lo hizo.

Uno de los efectos más interesantes de introducir los documentos libres en el aula es que difuminan la frontera entre quien aprende y quien enseña. Los documentos libres son un puente para establecer contacto con una comunidad de interés mucho más vasta que la del centro educativo, permitiendo el aprendizaje continuo y fomentando una experiencia plural y transformadora: el criterio para participar en un documento es, solamente, hacerlo bien.

Un autor puede pensar que distribuir su documento bajo un copyright que restringe la libertad de copia es *más rentable* que otorgar mayores libertades. Esto no es necesariamente así, por varias razones.

En primer lugar, libre no quiere decir gratuito. Una editorial puede publicar un documento libre obteniendo beneficio de ello. De hecho, es una buena idea hacerlo dado lo agradable que resulta manejar un libro bien encuadernado. También los autores pueden aceptar una compensación de los lectores por su trabajo en un determinado documento.

En segundo lugar, la mayor parte de los autores son primeramente lectores. Cabe esperar, pues, que para la mayoría el enorme ahorro derivado del acceso a *muchos* documentos libres supere holgadamente el beneficio económico obtenido de *unos pocos* documentos no libres. La experiencia del software libre lo avala.

Finalmente, no se puede poner precio al beneficio social derivado de la existencia de documentos libres. Gracias a los derechos que uno posee sobre un documento libre puede adaptarlo para un curso académico eliminando lo que no es pertinente o es demasiado avanzado y complementando el tema con nuevas aportaciones, desde ejercicios o diagramas hasta apartados enteros.

Pensamos que las universidades u otras instituciones educativas podrían cumplir mejor su función social poniendo a disposición de la sociedad que las financia, en condiciones de libertad, su patrimonio más importante: el conocimiento.

El modelo de cooperación que proponemos (que anima al trabajo en equipo aunque no lo impone) permite abrir todas estas perspectivas y algunas más. Alqua intenta ofrecer los medios para esta tarea y relacionar, a través de los documentos libres, a los que tienen saberes que comunicar y a los que sienten curiosidad por dichos saberes.

Conclusión

Alqua tiene una tarea muy ilusionante y tan ambiciosa que sólo es factible en comunidad. Por ello, pedimos a las personas que forman parte de instituciones o empresas que colaboren con Alqua para que éstas apoyen económicamente el proyecto o patrocinen ediciones impresas y donaciones a las bibliotecas públicas. Ciertamente, los medios materiales son necesarios, pero inútiles si, a nivel particular, no contamos con tu participación como individuo, aprendiendo y enseñando, para que los documentos libres en marcha y otros nuevos alcancen los altos niveles de calidad a los que aspiramos.

Te invitamos a construir un patrimonio científico que nos pertenezca a todos.

Versión 2.0, marzo de 2003

El proyecto libros abiertos de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el manifiesto de Alqua y las directrices para documentos libres de Alqua . Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.

Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.

- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.

- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.

- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, http://alqua.org

2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.

3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.

4. Si puedes, adjuntar al archivador una copia del CD-ROM de documentos libres de Alqua .

5. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a librosabiertos@alqua.org .

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el manifiesto de Alqua , persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

Geometría simpléctica

José Luis Tábara Carbajo

descripción

Una introducción a la geometría simpléctica orientada a la aplicación a la mecánica clásica. Contiene figuras y ejercicios resueltos.

requisitos

- Teoría de variedades
- Ecuaciones diferenciales ordinarias

http://alqua.org/libredoc/GS

Aprender en comunidad - http://alqua.org ◁

otros documentos libres

Variedades, tensores y física - Óptica electromagnética - Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción a la física cuántica, segunda parte - Redes y sistemas - Sistemas Operativos - Geometría simpléctica - Física del láser - Análisis funcional - Geografía general de España (en preparación).

http://alqua.org/libredoc/

alqua,madeincommunity