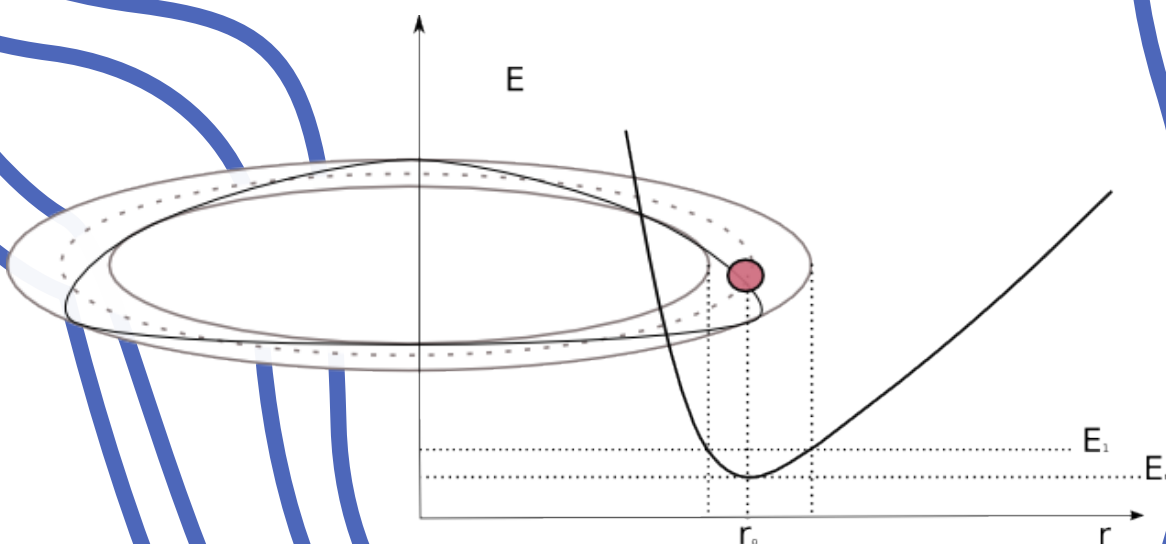


Álvaro Hacar González  
Fabio Revuelta Peña  
Israel Saeta Pérez  
Pablo M. García Corzo  
Enrique Maciá Barber

# Mecánica lagrangiana

Teoría y práctica





---

<http://alqua.org/libredoc/LAG>

Álvaro Hacar González	<a href="mailto:alvaro.hacar@gmail.com">alvaro.hacar@gmail.com</a>	<a href="http://alqua.org">http://alqua.org</a>
Fabio Revuelta Peña	<a href="mailto:fabio.revuelta@upm.es">fabio.revuelta@upm.es</a>	<a href="http://alqua.org">http://alqua.org</a>
Israel Saeta Pérez	<a href="mailto:dukebody@gmail.com">dukebody@gmail.com</a>	<a href="http://dukebody.com">http://dukebody.com</a>
Pablo M. García Corzo	<a href="mailto:ozrocpablo@gmail.com">ozrocpablo@gmail.com</a>	<a href="http://alqua.org">http://alqua.org</a>
Enrique Maciá Barber	<a href="mailto:macia@material.fis.ucm.es">macia@material.fis.ucm.es</a>	<a href="http://material.fis.ucm.es/">http://material.fis.ucm.es/</a>

---

## Mecánica lagrangiana

---

versión 0.10.1  
17/07/2009



alqua, **madeincommunity**



© 2009 Álvaro Hacar González, Fabio Revuelta Peña, Israel Saeta Pérez, Pablo M. García Corzo y Enrique Maciá Barber

Este documento está bajo una licencia Atribución-No Comercial-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia escriba una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA o visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/legalcode.en>.

Las partes del documento que mencionen una licencia distinta se rigen por los términos de aquella.

**CDU** 531.5

**Area** mecánica clásica

### **Editores**

Israel Saeta Pérez [dukebody@gmail.com](mailto:dukebody@gmail.com)

### Notas de producción

alfeizar, v. 0.3 © del diseño Álvaro Tejero Cantero.  
compuesto con software libre

*Dedicado*

A nuestros amigos y familia



# Índice general

<b>Portada</b>	<b>I</b>
<b>Copyleft</b>	<b>IV</b>
<b>Índice general</b>	<b>VII</b>
<b>1. Mecánica Newtoniana</b>	<b>1</b>
1.0.1. Concepto de inercia . . . . .	1
1.1. Concepto de masa puntual . . . . .	3
1.2. Leyes de Newton . . . . .	4
1.3. Sistemas de referencia no inerciales . . . . .	6
1.3.1. La gravitación de Newton y el principio de relatividad de Galileo . . . . .	6
1.3.2. Esferas de Newton . . . . .	7
1.3.3. Teorema de Coriolis . . . . .	8
1.3.4. Movimiento sobre la superficie terrestre . . . . .	9
1.3.5. Péndulo de Foucault . . . . .	9
1.3.6. Mundoanillo (Ringworld) . . . . .	11
1.3.7. Aro con bola deslizante (estudio newtoniano) . . . . .	12
1.4. Energía . . . . .	13
1.4.1. Teoría del potencial . . . . .	13
1.4.2. Estudio de potenciales unidimensionales . . . . .	17
1.5. Sistemas disipativos . . . . .	18
1.5.1. Proyectoil de Tartaglia . . . . .	19
<b>2. Fundamentos de la mecánica lagrangiana</b>	<b>23</b>
2.1. Grados de libertad, ligaduras y coordenadas generalizadas . . . . .	23
2.1.1. Concepto de ligadura . . . . .	23
2.1.2. Clasificación de las ligaduras atendiendo a las ecuaciones de ligadura . . . . .	27
2.1.3. Clasificación de los sistemas mecánicos (atendiendo al tipo de ligadura) . . . . .	31
2.1.4. Grados de libertad de un sistema y coordenada generalizada . . . . .	33
2.2. Principio de los trabajos virtuales y principio de D’Alambert . . . . .	34
2.2.1. Principio de los trabajos virtuales (J. Bernoulli, 1717) . . . . .	36
2.2.2. Principio de D’Alambert . . . . .	39
2.3. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	41
2.4. Sistemas naturales . . . . .	49
2.5. Potencial generalizado . . . . .	51

## ÍNDICE GENERAL

2.6. Función de Rayleigh. Función de disipación. . . . .	53
2.7. Ecuación de la energía . . . . .	54
2.8. Resumen y formulario . . . . .	56
<b>3. Leyes de conservación</b>	<b>59</b>
3.1. Introducción . . . . .	59
3.2. Coordenadas cíclicas e integrales primeras . . . . .	59
3.3. La integral de Jacobi . . . . .	60
3.4. El péndulo simple . . . . .	67
3.5. La integral de acción y el Principio de Hamilton . . . . .	70
3.6. Las simetrías de la integral de acción: el teorema de Noether . . . . .	71
3.7. El método de los multiplicadores de Lagrange . . . . .	75
<b>4. Potenciales centrales</b>	<b>81</b>
4.1. Problema de los dos cuerpos . . . . .	81
4.2. Elección de coordenadas generalizadas . . . . .	83
4.3. Simetrías del lagrangiano del sistema . . . . .	85
4.3.1. Simetría respecto de $\varphi$ . . . . .	85
4.3.2. Simetría respecto de $t$ . . . . .	86
4.4. Potencial efectivo . . . . .	89
4.5. Ecuación de las órbitas de Binet . . . . .	92
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>
<b>Historia y por hacer</b>	<b>99</b>
<b>Manifiesto de Alqua</b>	<b>101</b>
<b>El proyecto libros abiertos de Alqua</b>	<b>105</b>
<b>Otros documentos libres</b>	<b>110</b>



# 1 Mecánica Newtoniana

## ¿Absoluto, relacional o relativo?

¿Son el espacio y el tiempo entidades físicas en toda regla o sólo relaciones entre cuerpos materiales?

**Newton** comienza sus *Principia* afirmando con una rotundidad casi salvaje que el espacio absoluto, por su propia naturaleza, se mantiene siempre inmutable. Lo establece, pues, como «verdad de fe» que no justifica y apoyándose en él construye el concepto de movimiento absoluto como movimiento en relación a ese espacio absoluto.

Absolute space in its own nature without relation to anything external, remains always similar and immovable.

Absolute motion is the translation of a body from one absolute place to another.

A la hora de la verdad, cuando nos pongamos a medir la distancia entre dos masas, por ejemplo, mediremos la distancia entre ellas. Cuando fijemos un sistema de referencia deberemos referirlo a alguna entidad física palpable de algún modo. El espacio absoluto no podemos sentirlo de ningún modo... ¿O sí?

Este argumento es una forma simplificada de acercarnos al *relacionismo* esgrimido por **Leibniz** en sus célebres discusiones[1] frente a Clarke (como portavoz de Newton). Leibniz no quiso considerar el espacio absoluto como un ente físico, el espacio solamente tiene sentido como relación entre dos cuerpos.

En cuanto al movimiento, Leibniz lo define como un movimiento cuya causa es intrínseca al propio cuerpo, en contraposición al movimiento relativo entre los cuerpos. Lo que significa eso de causa intrínseca al propio cuerpo no nos queda, de momento, demasiado claro.

### 1.0.1. Concepto de inercia

El problema que reside bajo esta discusión no es tan abstracto y metafísico como puede parecer en un primer momento y en seguida vamos a ver cuál es el interés que tiene para nuestro estudio.

#### Hacia el concepto de inercia

Los **griegos** (**Aristóteles** y los peripatéticos) tenían una dinámica muy rudimentaria[2] con ideas como que los objetos tienen su lugar natural (tanto más abajo cuanto más pesados y tanto más arriba cuanto más ligeros). Consideraban movimiento natural el que

les llevaba en dirección a su posición natural y movimiento violento todo aquel que no cumpliese esta finalidad.

Sus observaciones experimentales eran muy poco precisas, tanto que pensaban que los cuerpos pesados caían más aprisa que los ligeros.

En cuanto a la inercia, consideraban que para mantener la velocidad constante de un cuerpo, debía existir una fuerza continua que lo impulsase.

Este pensamiento no es descabellado en las primeras observaciones de un mundo en el que el rozamiento con el aire frena el movimiento de los cuerpos.

El siguiente paso hacia lo que hoy conocemos por inercia fue de la mano del persa **Avicenna**, nacido en el año 980 en lo que hoy es Uzbekistán.



Figura 1.1: Aristóteles y Avicenna

Avicenna concluyó en su mecánica que el movimiento era el resultado de una inclinación (*mayl*, proporcional a la masa y a la velocidad) transferida al proyectil por el lanzador, y que el movimiento no cesaría nunca en el vacío. El concepto de vacío preocupó mucho a los filósofos árabes y persas, seguramente pensar en ello fue lo que les llevó a darse cuenta de que la deceleración constante de un cuerpo tenía que ver con el aire que lo rodea.

Desde sus teorías (que eran ya bastante coherentes con las dos primeras leyes de Newton) partiría el francés **Jean Buridan** (1295) para desarrollar su teoría del ímpetus. No supo alejarse de los peripatéticos en cuanto a las ideas de reposo y movimiento, para eso debía llegar Galileo.

### Principio de relatividad de Galileo

**Galileo** (1564) propone por primera vez que la tendencia natural de un cuerpo es la de mantenerse inmóvil o con velocidad constante.

Según lo describe en sus diálogos:

**Salviati:** Pero, ¿con qué clase de movimiento? Continuamente acelerado, como en el plano inclinado hacia abajo, ¿o crecientemente retardado, como en el plano hacia arriba?

**Simplicio:** No puedo ver causa alguna de aceleración o desaceleración, no habiendo pendiente hacia arriba o hacia abajo.

**Salviati:** Exactamente. Pero si no hay causa alguna para el retardo de la bola, menos debería haberla para que alcance el estado de reposo; entonces, ¿hasta qué distancia continuará moviéndose la bola?

**Simplicio:** Tanto como continúe la superficie sin subir ni bajar.

**Salviati:** Entonces, si dicho espacio fuera ilimitado, ¿el movimiento en él sería análogamente ilimitado? Es decir, ¿perpetuo?

**Simplicio:** Así me parece, si el cuerpo móvil fuera de material duradero.

Ésta es la base del principio de relatividad de Galileo.

En otro diálogo no menos importante, refuta la concepción aristotélica de la caída de los cuerpos:

**Simplicio:** No puede haber duda de que un cuerpo que se mueve en un medio único tiene una velocidad fija determinada por la Naturaleza...

**Salviati:** Entonces, si tomamos dos cuerpos cuyas velocidades naturales sean diferentes, es evidente que, al unirlos, el más rápido será retardado por el más lento, y este algo acelerado por el otro. ¿No estás de acuerdo con mi opinión?

**Simplicio:** No hay dudas de que tienes razón.

**Salviati:** Pero si esto es cierto y si una piedra se mueve con una velocidad de, digamos, ocho, mientras otra menor se mueve con una velocidad de cuatro, cuando se unan, el sistema se moverá con una velocidad inferior a ocho; en cambio, cuando las dos piedras estén juntas constituirán una piedra mayor que aquella que antes se movía con velocidad ocho. Por lo tanto, el cuerpo más pesado se mueve a menor velocidad que el liviano; efecto contrario a tu hipótesis...

## 1.1. Concepto de masa puntual

**Descartes** es quien introduce los sistemas de referencia para la geometría. Paulatinamente la geometría se va introduciendo en la estática y en la dinámica con conceptos como puntos sin dimensiones, curvas lineales, superficies sin grosor...

El concepto de punto material es tremendamente útil como abstracción matemática aunque delicado físicamente. Un punto material es un lugar geométrico sin dimensiones, un punto matemático, al que asignamos una masa. Según [3], un punto material es un “cuerpo cuyas dimensiones son despreciables con respecto a los otros cuerpos con los que interacciona”.

El problema de los puntos materiales salta a la vista cuando aparecen fuerzas que dependen de la geometría del cuerpo. Las fuerzas de inercia en la dinámica del sólido rígido o las fuerzas de rozamiento en el viscosímetro de Stokes.

Considerar el punto material como ente físico conlleva demasiadas dificultades. La densidad de todo punto material, por pequeña que fuese su masa, sería infinita. La fuerza gravitacional entre dos masas puntuales se dispararía a infinito si éstas llegasen a tocarse.

Inercialmente, podremos hablar de un punto material siempre y cuando sean despreciables los efectos de rotación sobre sí mismo. Para que esto suceda, a cualquier nivel de precisión, el punto material no puede tener estructura interna. En ese sentido podemos considerar al electrón como una de las mejores aproximaciones a punto material.

D'Alembert[4] describe así el concepto de masa puntual:

(...) mediante operaciones y abstracciones sucesivas de nuestro intelecto, despojamos la materia de casi todas sus propiedades sensibles para no considerar en cierto modo más que su fantasma;(...)

## 1.2. Leyes de Newton



Figura 1.2: Galileo, Descartes y Newton

**Newton**, define su primera ley (la ley de inercia) de la siguiente manera:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suam mutare.

Es decir, que todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme mientras no existan fuerzas externas que lo perturben (si no se ejerce ninguna acción sobre él). En lenguaje matemático:

$$\frac{dx}{dt} = C_1 ; \frac{dy}{dt} = C_2 ; \frac{dz}{dt} = C_3 ; \text{con } C_i = Cte \quad (1.1)$$

que podemos expresar en forma vectorial como:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \ddot{\vec{x}} = \vec{a} \equiv 0 \quad (1.2)$$

Es interesante meditar la siguiente cuestión: la ausencia completa de fuerzas no puede cumplirse estrictamente en un universo en el que existan fuerzas de largo alcance. No obstante, puede tenerse una resultante nula si se dan las condiciones de simetría adecuadas.

En su segunda ley, Newton utiliza el momento como cantidad conservada:

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Que, en términos matemáticos traduciríamos como:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\vec{a}; \vec{p} = m\vec{v} \quad (1.3)$$

Considerando la masa como una cantidad invariante.

Finalmente, Newton enuncia la ley de acción y reacción:

Lex III. Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Siempre que dos cuerpos interactúan, la fuerza  $\vec{F}_{12}$  que el primer cuerpo ejerce sobre el segundo es igual y opuesta a la fuerza  $\vec{F}_{21}$  que el segundo ejerce sobre el primero.

*Consecuencias*: La conservación del momento lineal total de un sistema de partículas cuando sobre él no actúan fuerzas externas.

La validez de la Tercera Ley se halla sujeta a ciertas restricciones:

1. las fuerzas se ejercen por acción a distancia (esto es, la fuerza no es mediada por un campo intermedio que posea momento y energía).
2. la interacción se produce instantáneamente (ya que las fuerzas de acción y reacción deben medirse en el mismo instante).

*Ejemplos* en los que **NO** se cumple la Tercera Ley:

1. interacción entre partículas cargadas en movimiento (la fuerza es mediada por fotones del campo electromagnético)
2. colisiones atómicas (ya que la duración de la colisión es grande en comparación con el tiempo que tardan en reordenarse los electrones de modo que el potencial electrostático se modifica gradualmente mientras dura la colisión).

Einstein pone en entredicho algunos conceptos como la simultaneidad que debemos analizar para saber dónde nos metemos al trabajar en el marco de la mecánica clásica[5].

## Simultaneidad e información

Supongamos dos observadores situados en dos puntos distintos a los que asociaremos dos sistemas de referencia  $O$  y  $O_1$ . Del mismo modo que definimos dos sistemas de referencia diferentes para las coordenadas espaciales y tendremos que transformar las coordenadas de uno para expresarlas respecto del otro, deberíamos tener en cuenta que cada uno tendrá su referencia temporal, es decir, su reloj.

La cinemática clásica supondrá dos hipótesis:

- Ambos observadores deben saber qué hora marca el reloj del otro en todo momento. Eso implica que debe existir un medio capaz de transmitir información de manera instantánea (a velocidad infinita).

Esa suposición garantiza que los observadores serán capaces de decidir la simultaneidad de un suceso que uno mide cuando su reloj marcaba  $t$  y el otro cuando el suyo marcaba  $t_1$ .

- Del mismo modo que sucede con el tiempo, sucederá con el espacio. Aunque cada uno mida la posición espacial de un suceso según su sistema de coordenadas, son capaces de saber si el conjunto de coordenadas dado por el otro se refiere al mismo punto conociendo la posición de uno de ellos respecto al otro.

Estas dos hipótesis que podían parecer naturales a ojos de Galileo o de Newton se rompen en la mecánica relativista. Desde el momento en que Einstein decide que nada puede viajar más rápido que la luz, la posibilidad de que ambos observadores sepan exactamente la hora que marca el reloj del otro desaparecerá.

Leibniz o Mach parecían intuir que algo fallaba y aunque no supieron dar respuesta a sus dudas, tuvieron la valentía de plantearlas allanando el camino para la llegada de Einstein.

### 1.3. Sistemas de referencia no inerciales

Dejando de lado las discusiones filosóficas, lo que debemos tener claro al estudiar mecánica clásica es que hay sistemas de referencia inerciales y otros no inerciales, y que en estos segundos aparecerán fuerzas que debemos tratar con cuidado.

Según **L. Lange** (1885), un sistema de referencia inercial es un:

Sistema de referencia en el que una partícula libre se mueve uniformemente

En relación a estos sistemas, el principio de relatividad de Galileo (expuesto en [1.0.1](#)) afirma que las leyes de la mecánica son las mismas en dos sistemas de referencia que mantengan constante su velocidad relativa.

#### 1.3.1. La gravitación de Newton y el principio de relatividad de Galileo

Veamos a continuación cómo se entiende esto de la invarianza de las leyes de la naturaleza con la gravitación Newtoniana.

Pongamos los ejes, sin pérdida de generalidad, de manera que el eje  $y$  apunte en la dirección del movimiento relativo entre los sistemas de referencia. Supongamos también que en el instante inicial coinciden los orígenes de ambos sistemas de referencia.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y - vt \\ z' = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Si introducimos la ley de gravitación universal:

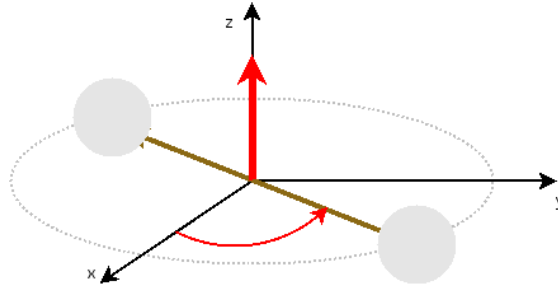
$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.5)$$

donde  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{v}t \rightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}'_2 + \vec{v}t) - (\vec{r}'_1 + \vec{v}t)$   
que al introducirlo en la ley de gravitación:

$$\vec{F}' = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|^3} (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \quad (1.6)$$

### 1.3.2. Esferas de Newton

Además de su famoso cubo, en los diálogos epistolares con Leibniz, Clarke propone un experimento mental consistente en dos esferas unidas por una cuerda y puesto todo el conjunto en rotación respecto a un eje de simetría perpendicular a la cuerda.



**Figura 1.3:** Experimento mental de las esferas de Newton

La velocidad de una de las esferas será:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\theta}) \\ \vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{\dot{x}} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad (1.7)$$

Y la aceleración, por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{\ddot{x}} &= \frac{d}{dt} r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \cos \theta, -\dot{\theta} \sin \theta, 0) = \\ &= r\dot{\theta}^2(-\cos \theta, -\sin \theta, 0) = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r \end{aligned} \quad (1.8)$$

Encontramos, en definitiva, que un movimiento de rotación a velocidad angular constante se convierte en una aceleración centrípeta. Esa aceleración hace que no se cumplan las transformaciones de Galileo.

A su vez, la aceleración se convertirá por Newton en una fuerza:

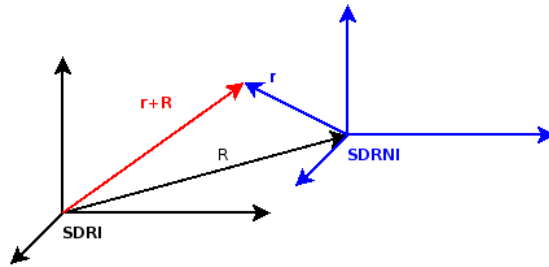
$$\vec{F}_c = \sum m\vec{a} = m\vec{x} = -mr\dot{\theta}^2\vec{u}_r \quad (1.9)$$

El doble de esa fuerza (por simetría con las dos esferas) será la tensión que soporta la cuerda. Esa tensión es medible y su existencia nos da una información objetiva de que el sistema de referencia no es inercial.

Con esa fuerza objeto Newton la indiscernibilidad de los sistemas en rotación.

### 1.3.3. Teorema de Coriolis

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia, uno inercial y otro no inercial y queremos pasar de uno a otro. El movimiento del sistema de referencia no inercial será de rotación en torno a un eje fijo:



**Figura 1.4:** Posición de un punto respecto a sistema de referencia inercial y no inercial.

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{SDRI}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{SDRNI}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (1.10)$$

$$m \cdot \vec{a}_{\text{ni}} = \sum \vec{F} - m \left[ \vec{\ddot{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{ni}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \quad (1.11)$$

donde:

$$\begin{cases} \vec{\ddot{R}} & \rightarrow \text{Arrastre} \\ \vec{\omega} \times \vec{r} & \rightarrow \text{Azimutal} \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) & \rightarrow \text{Centrífuga} \\ 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{ni}} & \rightarrow \text{Coriolis} \end{cases} \quad (1.12)$$



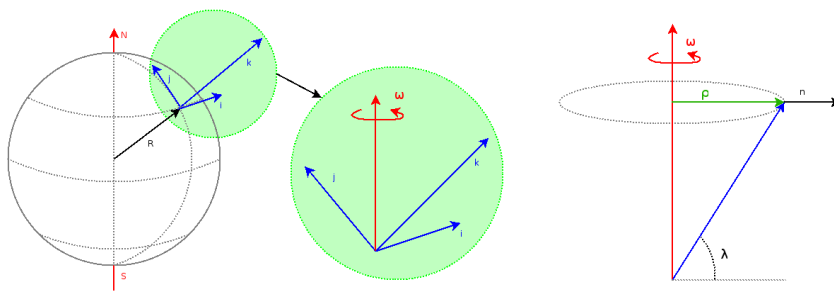


Figura 1.5: Movimiento sobre la superficie terrestre

### 1.3.4. Movimiento sobre la superficie terrestre

Según el sistema de referencia elegido (representado en la figura 1.5) la velocidad angular  $\vec{\omega}$  tendrá como componentes  $\vec{\omega} = \omega_0 (0, \cos \lambda, \sin \lambda)$ . En cuanto al vector normal al sentido de giro,  $\hat{n} = (0, -\sin \lambda, -\cos \lambda)$ .

Por otro lado, la componente de arrastre:

$$\vec{R}_0 = a_\tau \hat{\tau} + a_n \hat{n} = \frac{v^2}{\rho} \hat{n} = \omega_0^2 \rho \hat{n} \quad (1.13)$$

Ahora planteamos para cada componente la ecuación (1.11):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x - m \left( 2\omega_0 (\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \underbrace{-\omega_0^2 x}_{\text{centrifugal}} \right) = \\ &= F_x - 2m\omega_0 (\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ m\ddot{y} &= F_y - m \left( 2\omega_0 \dot{x} \sin \lambda - \underbrace{R\omega_0^2 \sin \lambda \cos \lambda}_{\text{centrifugal}} + \underbrace{\omega_0^2 (z \sin \lambda \cos \lambda - y \sin^2 \lambda)}_{\text{centrifugal}} \right) = \\ &= F_y - m (-R\omega_0^2 \sin \lambda \cos \lambda + 2\omega_0 \dot{x} \sin \lambda) \\ m\ddot{z} &= F_z - m \left( \underbrace{R\omega_0^2 \cos^2 \lambda}_{\text{centrifugal}} - 2\omega_0 \dot{x} \cos \lambda - \underbrace{\omega_0^2 (z \cos^2 \lambda - y \sin \lambda \cos \lambda)}_{\text{centrifugal}} \right) = \\ &= F_z - m (R\omega_0^2 \cos^2 \lambda - 2\omega_0 \dot{x} \cos \lambda) \end{aligned} \quad (1.14)$$

En la expresión anterior hemos señalado los términos que iban con  $\omega_0^2$  porque dada la velocidad angular de nuestro planeta ( $\omega_0 \approx 10^{-5} s^{-1}$ ) podríamos pensar en despreciarlos sin demasiados problemas. Sin embargo, los casos en que va con  $R$ , que es bastante grande, sí que debemos tenerlos en cuenta ( $R\omega_0^2 \approx 0.034 m s^{-2}$ ).

### 1.3.5. Péndulo de Foucault

Leon Foucault realizó en 1851 la primera demostración dinámica de la rotación terrestre en el observatorio de París. El 26 de marzo se realizó una espectacular demostración pública en el panteón de París.



**Figura 1.6:** Péndulo de Foucault en el panteón de París

El péndulo colgado de la cúpula del panteón de París medía 67 metros de largo, tenía como masa una bala de cañón de 26 kilos y su período de oscilación era de unos 16 segundos.

El péndulo iba trazando una línea en el suelo de arena unos dos milímetros a la derecha en cada oscilación, demostrando que la tierra giraba.

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son las resultantes de que la tierra es un sistema de referencia no inercial.

Planteando las ecuaciones de Newton:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x - 2m\omega_0(\dot{z}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta) \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega_0\dot{x}\sin\theta \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega_0\dot{x}\cos\theta \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{-T}{ml}x \\ F_y = \frac{-T}{ml}y \\ F_z = \frac{T}{ml}(l - z) \rightarrow z \approx Cte \end{array} \right. \quad (1.15)$$

$$\frac{T}{m} = g_0 - 2\omega_0\dot{x}\cos\theta \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x + 2\omega_0\dot{y}\sin\theta + \frac{2\omega_0}{l}x\dot{x}\cos\theta \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\omega_0\dot{x}\sin\theta + \frac{2\omega_0}{l}y\dot{x}\cos\theta \end{aligned} \quad (1.17)$$

haciendo  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  y  $\alpha = \omega_0 \sin\theta$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\Omega^2x + 2\alpha\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\Omega^2y - 2\alpha\dot{x} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Que se puede resolver utilizando complejos[6]:

$$i\ddot{x} + \ddot{y} = -\Omega^2(i\dot{x} + \dot{y}) + 2\alpha i(i\dot{x} + \dot{y}) \quad (1.19)$$

### 1.3.6. Mundoanillo (Ringworld)

Una esfera de Dyson es una mega-estructura artificial imaginada por Freeman Dyson consistente en una corteza esférica con centro en una estrella y radio del orden de una unidad astronómica. Dyson las propuso como hipótesis para recoger toda la energía de una estrella y servir también de terreno habitable para suprimir los problemas de superpoblación de una especie como la humana.

Uno de los problemas fundamentales de esta estructura sería la necesidad de generar una gravedad artificial para mantener a los pobladores en pie en el interior de la esfera. Larry Niven en su novela Mundoanillo [7] imagina una simplificación de una esfera de Dyson convirtiéndola en un anillo de radio  $153Gm$  (1.02 unidades astronómicas), y  $1.60Gm$  de ancho. El anillo rotaría con una velocidad angular de  $7.98 \cdot 10^{-6} s^{-1}$  de modo que las fuerzas centrípetas harían el trabajo de la gravedad (principio de equivalencia de Einstein) manteniendo una atmósfera entre dos muros exteriores de unos  $1600km$  de altura.

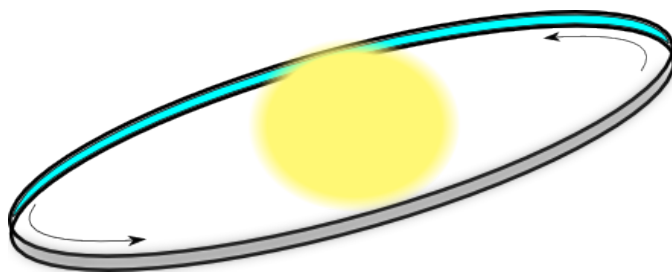


Figura 1.7: Mundoanillo

Las dimensiones del anillo son tan monstruosas que para los anillícolas sería mucho más complicado darse cuenta de que viven en un anillo en rotación de lo que le fue a nuestra especie hacerlo con respecto a una superficie esférica con una curvatura mucho mayor.

Seguramente se podría construir un péndulo de Foucault o algún análogo que diese a los anillícolas una evidencia de que viven en un anillo en rotación.

Veamos un poco cómo se comportarían los términos de la ecuación (1.11) en este sistema:

**Arrastre:** Si consideramos que la estrella en torno a la que gira Mundoanillo no se mueve, no existirán términos de arrastre.

**Azimutal:** Si la velocidad de giro y el eje son constantes, este término se anulará también.

**Centrífugo:** Este término apuntará siempre “hacia abajo” para los anillícolas. Les proporcionará “su fuerza de gravedad”.

**Coriolis:** Tenderá a hacer girar todo movimiento en la misma dirección de giro del Mundoanillo pero en sentido contrario.

Las fuerzas de Coriolis son las que rigen en la tierra el sentido de giro de los huracanes. En el Mundoanillo los huracanes serían remolinos horizontales con su eje paralelo al eje de giro del Mundoanillo.

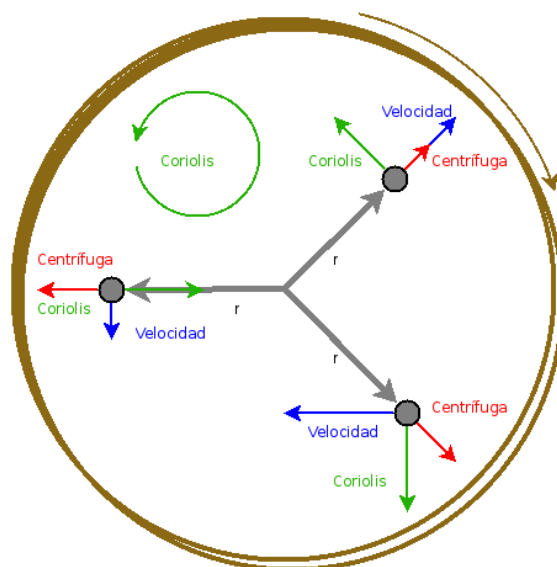


Figura 1.8: Fuerzas de coriolis en Mundoanillo

### 1.3.7. Aro con bola deslizante (estudio newtoniano)

Supongamos un aro amásico circular con una bola ensartada (imaginemos una cuenta de collar) que puede deslizarse libremente y sin rozamiento a lo largo del aro. Pongamos ahora el aro a girar en torno a un eje vertical con velocidad  $\vec{\omega}$  y describamos el sistema mediante dos coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  tangente y perpendicular al aro respectivamente.

La fuerzas involucradas en este sistema serán:

$$\sum \vec{F} = \underbrace{mg(\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta)}_{\text{Peso}} + \underbrace{F_r \hat{e}_r}_{\text{Ligaduras}} + \underbrace{F_\phi \hat{e}_\phi}_{\text{Coriolis}} \quad (1.20)$$

Las fuerzas de ligadura vendrán descritas como:

$$F_r = \underbrace{-mg \cos \theta}_{\text{Peso}} - \underbrace{m \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{R} - mR\omega^2 \sin^2 \theta}_{\text{Centrífuga}} \quad (1.21)$$

Y el término de Coriolis:

$$F_\phi = -2m\omega R \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.22)$$

Con todo, la ecuación de movimiento será:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (1.23)$$

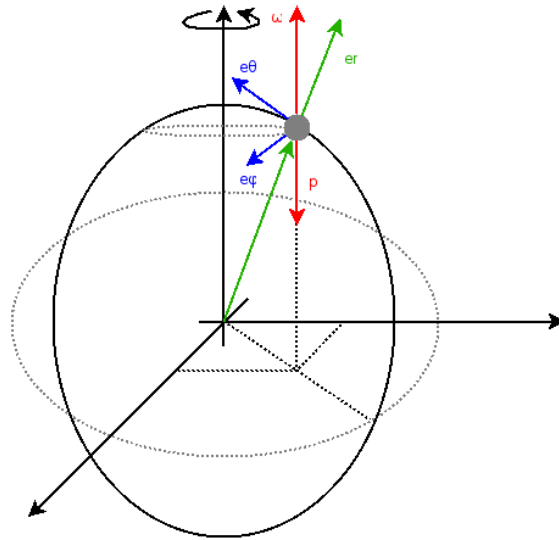


Figura 1.9: Aro con bola deslizante

## 1.4. Energía

### 1.4.1. Teoría del potencial

**Newton** en 1687 plantea en su ley de gravitación universal que todo cuerpo con masa ejerce una atracción sobre otro cuerpo con masa de forma instantánea e independientemente de la distancia que los separe.

Esta fuerza es proporcional a las masas de los cuerpos e inversamente al cuadrado de la distancia que los separa. Siendo su dirección y sentido de carácter atractivo entre ambos cuerpos.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \rightarrow \vec{F}_x = -G \frac{Mm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x \hat{i} \quad (1.24)$$

Esta teoría implica una suposición algo delicada que es la de “acción a distancia”. El sol tira de la tierra con una cierta fuerza pero no tiene una cuerda ni nada parecido con que sujetarla.

El concepto matemático de campo nace de la mano de **Leonard Euler** cuando se trata de llevar a la hidrodinámica las ecuaciones de Newton. Un campo se define en este contexto como una cierta región del espacio en la que cada punto está caracterizado por una cierta magnitud (o magnitudes) dependiente de sus coordenadas espaciales y temporales.

A **Lagrange** en 1777 se le ocurre una idea feliz para pasar de hacer complejas cuentas

vectoriales a cálculos analíticos escalares más sencillos de la siguiente manera:

$$F_x = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -GMm \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}} + C \right) \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}} + C \right) = x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (1.26)$$

Generalizando:

$$F_{x_i} = -GMm \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + C \right) \equiv -m \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1.27)$$

donde

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{r} + C \rightarrow \vec{F} = -m \vec{\nabla} \cdot V \quad (1.28)$$

Pero el paso trascendente hacia la teoría de potencial tendría que esperar a que en 1782 **Laplace** derivase por segunda vez.

Laplace concede al potencial el rango de *sustancia o propiedad* que se expande por el espacio haciendo que éste adquiera unas determinadas propiedades.

La función  $V$  comienza a llamarse *función potencial* en 1828 de boca de Green y posteriormente por Gauss.

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \gamma (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + C \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\gamma x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\gamma (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \gamma x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2x \\ &= -\gamma (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3\gamma x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = \\ &= -\gamma r^{-3} + 3\gamma x^2 r^{-5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\gamma r^{-3} + 3\gamma y^2 r^{-5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\gamma r^{-3} + 3\gamma z^2 r^{-5} \\ \nabla^2 V = \Delta V &= \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = -3\gamma r^{-3} + 3\gamma \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} r^{-5} \equiv 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Con lo que, finalmente, tenemos la primera ecuación del Campo:

$$\Delta V = \nabla^2 V = \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1.30)$$

### Campo y energía

Es fácil pasar de hablar en términos matemáticos abstractos a hablar de física planteando el trabajo de una fuerza por unidad de desplazamiento:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -m\vec{\nabla}V \rightarrow \vec{F}d\vec{r} = -m\vec{\nabla}Vd\vec{r} = -m \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} (dx, dy, dz) = \\ &= -m \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -mdV\end{aligned}\quad (1.31)$$

Con todo, el trabajo realizado por el campo sobre la partícula a lo largo de un desplazamiento diferencial:

$$W = \vec{F}d\vec{r} = -mdV \quad (1.32)$$

A lo largo de un cierto camino:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = -m \int_A^B dV = -m(V_B - V_A) = -(U_B - U_A) \quad (1.33)$$

donde  $U(x, y, z) = mV(x, y, z)$  es la energía potencial de una masa  $m$  en un campo  $V$ .

El resultado sólo depende de los extremos y no del camino recorrido, lo que implica que el campo es **conservativo**.

Bajo esa premisa, al integrar a un camino cerrado siempre obtendremos un trabajo nulo, a través del teorema de Stokes:

$$\underbrace{\oint_C \vec{F}d\vec{r}}_{\text{circulación}} = \underbrace{\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \hat{n} ds}_{\text{flujo}} = \oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V) \hat{n} ds \equiv 0 \quad (1.34)$$

Con lo que, para identificar un campo conservativo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (1.35)$$

### Cerca de la superficie terrestre

Un potencial conservativo particular es el potencial gravitatorio en la superficie de la tierra.

Pongamos ahora a un señor en lo alto de la torre de Pisa y pidámosle que deje caer una piedra. La piedra tendría una cierta energía potencial proporcional a su masa, a la altura de la torre y a una cierta constante:

$$U = mgh \quad (1.36)$$

Esa energía variará con el tiempo a medida que la piedra caiga, es decir:

$$\frac{dU}{dt} = mgh \quad (1.37)$$

Galileo ya nos dijo que las cosas caen con una cierta aceleración constante  $g$ , con lo que sabemos que la velocidad con que caerá será  $\dot{h} = -gt$  y la posición en cada instante de tiempo (si en  $t = 0$  la soltamos)  $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ , de donde:

$$\frac{dU}{dt} = -mg^2t \quad (1.38)$$

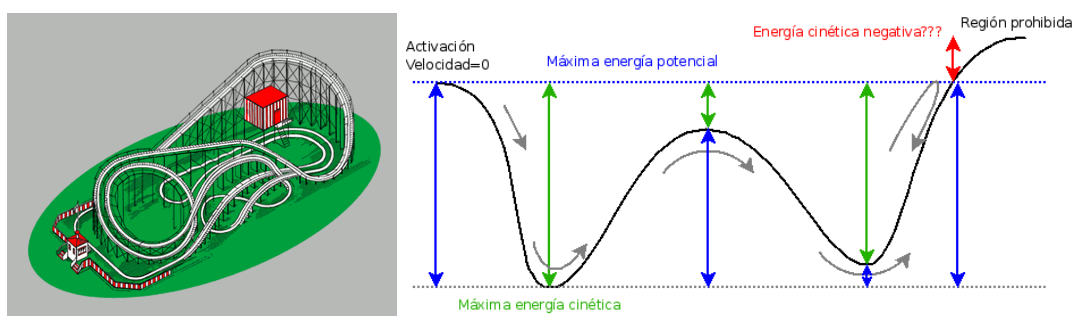
Veamos a continuación lo que sucede con la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 \rightarrow \frac{dT}{dt} = mg^2t \quad (1.39)$$

que “casualmente” es la misma cantidad (cambiada de signo) que encontramos al derivar la energía potencial.

Esto es generalizable a trayectorias más complicadas que una caída libre.

Imaginemos, por ejemplo, algo complicado de verdad, una montaña rusa.



**Figura 1.10:** Trayectoria complicada

La montaña rusa tiene como energía de activación una cadena que eleva los vagones hasta un punto, concretamente hasta el punto más elevado de la estructura. Eso implica el máximo de energía potencial. De allí parte el movimiento con una velocidad inicial aproximadamente nula.

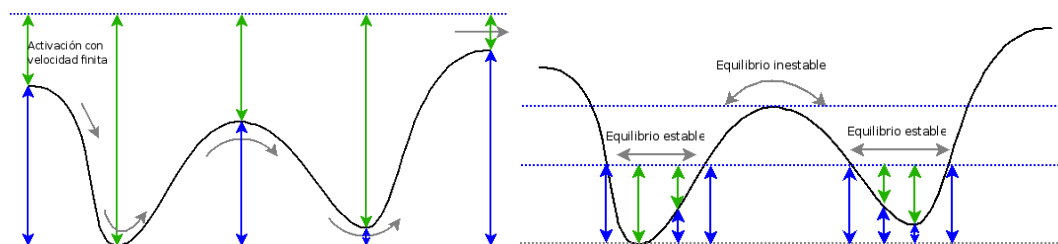
A medida que cae va adquiriendo velocidad y por tanto energía cinética al mismo ritmo que pierde altura y por tanto energía potencial. Al ascender posteriormente una pendiente sucede lo contrario hasta el punto de que si llegase a la misma altura a la que empezó el viaje habrá perdido toda su velocidad y (de estar en un punto de pendiente distinta de cero) comenzará un camino de vuelta.

No obstante, es también intuitivo que si la velocidad de activación es distinta de cero (exceso de energía) podrá ascender en un determinado momento algo más de la altura a la que partió.

Este esquema intuitivo es muy aplicable a campos unidimensionales genéricos. Podremos ver el perfil de un potencial como si fuese la vía de la montaña rusa.



### 1.4.2. Estudio de potenciales unidimensionales



**Figura 1.11:** Exceso de energía en la activación y puntos de equilibrio

Ante cualquier potencial conservativo (tratemos por simplicidad potenciales unidimensionales) podremos sacar algunas conclusiones estudiando detalles sencillos de su topología.

La información más inmediata de calcular para un potencial  $U(x)$  son los puntos críticos, es decir, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$$U(x) \rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2U}{dx^2} < 0 & \rightarrow \text{Máximo} & \rightarrow \text{Equilibrio inestable} \\ \frac{d^2U}{dx^2} = 0 & \rightarrow \text{Punto de inflexión} & \rightarrow \text{Equilibrio inestable} \\ \frac{d^2U}{dx^2} > 0 & \rightarrow \text{Mínimo} & \rightarrow \text{Equilibrio estable} \end{cases} \quad (1.40)$$

El significado físico de estabilidad es bien intuitivo. Una cierta partícula está en reposo sobre un punto de equilibrio y si nada sucede ahí seguirá. Si de pronto aparece una perturbación que aleje a la partícula una distancia infinitesimal del punto de equilibrio y ésta regresa a su anterior posición automáticamente el punto será de equilibrio estable. En cualquier otro caso el equilibrio será inestable.

La gracia de esto es que cerca de los puntos de equilibrio estable, una pequeña energía producirá oscilaciones en torno a ese punto de equilibrio.

Si aproximamos por Taylor la función del potencial (sea cual sea) en torno a un punto de equilibrio estable:

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.41)$$

y tomamos los dos primeros términos del desarrollo obtenemos un potencial armónico que sabemos tratar muy bien:

$$U(x) \approx U(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}U''(x_0)}_{Cte} (x - x_0)^2 \quad (1.42)$$

El período de oscilación de un potencial armónico es  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}$  y será en general una aproximación muy razonable para oscilaciones suficientemente pequeñas.

En caso de tener que estudiar el potencial anarmónico:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))} \quad (1.43)$$

$$T = \pm 2 \int \sqrt{\frac{1}{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))}} dx \quad (1.44)$$

## 1.5. Sistemas disipativos

Estudiemos ahora cómo afrontar los sistemas disipativos, es decir, los sistemas en los que el móvil se va poco a poco frenando hasta llegar al estado de reposo.

Llamaremos fuerzas disipativas a aquellas que merman progresivamente la energía cinética del sistema sin convertir ésta en algún otro tipo de energía potencial reutilizable.

Vamos a considerar, por tanto, fuerzas que actúan exclusivamente en la dirección de movimiento del sistema y en oposición de sentidos. Fuerzas cuya magnitud dependa exclusivamente de la velocidad del sistema y hasta orden 2, es decir:

$$F(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 \quad (1.45)$$

donde

**Coulomb:**

$$a_0 = -\mu N = -\mu mg \dots \quad (1.46)$$

Serán los rozamientos que conocemos de cursos anteriores, con un coeficiente de rozamiento  $\mu$  que depende de los materiales en contacto ( $\mu \approx 0.6$  para acero-acero o  $\mu \approx 0.04$  para teflón-teflón).

En la ecuación dinámica funcionará como:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \rightarrow v - v_0 = -\mu gt \rightarrow x = x_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g} \quad (1.47)$$

**Stokes:**

$$a_1 = -6\pi\tilde{R}\tilde{\eta} \quad (1.48)$$

Ésta la veremos más en profundidad cuando estudiemos el viscosímetro de Stokes.  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del líquido en que irá inmersa la partícula, y  $\tilde{R}$  tiene que ver con las proporciones de la partícula respecto a las condiciones de contorno y también con las proporciones entre fuerzas viscosas e inerciales.

Como adelanto, el viscosímetro de Stokes será un cilindro con un cierto fluido por el que hacemos caer partículas (que pueden ser esferas de algún material o gotas de algún otro líquido).

En el viscosímetro de Stokes, la fuerza de rozamiento viene dada por la expresión:

$$F_r = 6\pi r\eta \left(1 + \frac{3}{16}R\right) v \quad (1.49)$$

Donde  $R$  es el número de Reynolds (del orden de  $10^{-5}$  para el viscosímetro de gotas o de  $10^{-2}$  para el de bolas).

Introduciéndolo en la ecuación dinámica:

$$m \frac{dv}{dt} = -6\tilde{R}\pi\eta v \rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{a_1}{m} dt \rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.50)$$

Si nos fijamos en esta expresión es sorprendente que con este tipo de rozamiento, la velocidad sólo llegaría a 0 a tiempo infinito.

$$x = x_0 + v_0\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x = x_\infty = x_0 + v_0\tau \quad (1.51)$$

Sin embargo, el espacio recorrido en un tiempo infinito es finito<sup>1</sup>.

### Newton:

$$a_2 = -\beta = \pi S \rho \quad (1.52)$$

Este término aparece, por ejemplo, en la dinámica de los meteoritos que entran en la atmósfera, para los que el coeficiente  $\pi$  es aproximadamente 1,  $S$  es la superficie del meteorito y  $\rho$  la densidad de la atmósfera.

También aparece en la hidráulica de los canales abiertos bajo el nombre de el número de *Froude*, que relaciona las fuerzas de inercia con las gravitacionales como  $\beta^2 = \frac{v_f^2}{gl}$ , donde  $v_f$  es una velocidad característica del sistema,  $l$  una longitud característica y  $g$  la aceleración de la gravedad.

En la ecuación dinámica funcionará como:

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2 \rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \left(\frac{v_0\beta}{m}\right)t} \rightarrow x = x_0 + \frac{m}{\beta} \log \left(1 + \left(\frac{v_0\beta}{m}\right)t\right) \quad (1.53)$$

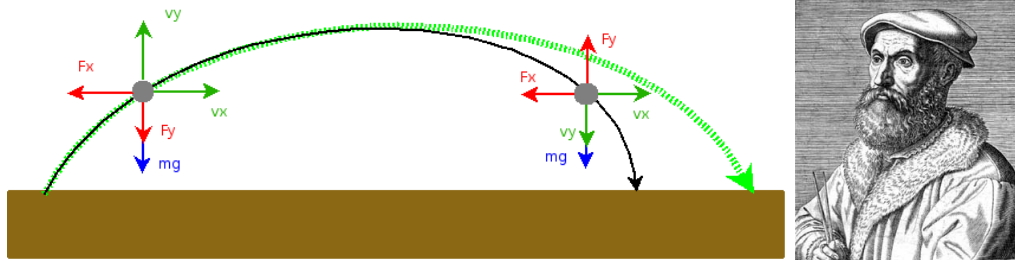
#### 1.5.1. Proyectoil de Tartaglia

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557) es conocido por resolver la ecuación general de un polinomio de tercer grado.

Además de eso, fue la primera persona en aplicar las matemáticas a problemas de artillería y sus trabajos fueron validados medio siglo después por las leyes de caída de los cuerpos de Galileo.

Tartaglia propone el modelo parabólico para la trayectoria de las balas de cañón, postulando que el ángulo óptimo para obtener el mayor alcance es de 45 grados.

<sup>1</sup>ver "Aquiles y la tortuga" en [http://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas\\_de\\_Zenón](http://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zenón)

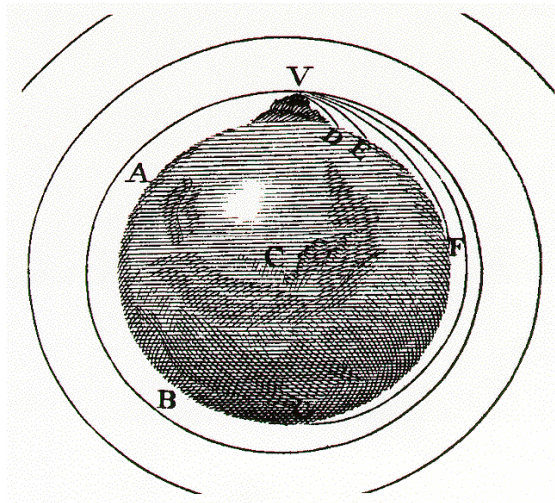


**Figura 1.12:** Proyectil de Tartaglia

Para el modelo de Tartaglia, el movimiento de la bala de cañón sería perpetuo en el eje horizontal y sólo se detendría al tocar con el suelo.

Galileo supo ver que la fricción era la que frenaba el proyectil alejándolo de su trayectoria parabólica del mismo modo que sucedía con sus planos inclinados. Llegó a imaginar un camino sin rozamiento alrededor de la tierra a lo largo del cual una partícula viajase indefinidamente. Sin embargo, vio problemas con el movimiento perpetuo de rotación de la tierra y la fricción que debería hacerla detenerse.

Newton llevó esta idea conjugada con la trayectoria parabólica de Tartaglia a su clímax en un célebre dibujo en el que un proyectil es disparado desde lo alto de una montaña cada vez con más fuerza hasta dar la vuelta a la tierra describiendo una órbita alrededor de la misma.



**Figura 1.13:** Dibujo de Isaac Newton. Principia, VII, libro III, p551.

Volviendo al proyectil de Tartaglia, analicemos su dinámica considerando que las

fuerzas de rozamiento involucradas son cuadráticas con la velocidad, es decir,  $F_r = -\beta v^2$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{m}{\beta} \log \left( 1 + \left( \frac{x_0 \beta}{m} \right) t \right) \\ y = y_0 + \frac{m}{\beta} \log \left( \frac{\cos(A - (\frac{\beta g}{m})t)}{\cos A} \right) \end{cases} \quad (1.54)$$

donde  $A = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta}{mg} v_{0y}^2}$



## 2 Fundamentos de la mecánica lagrangiana

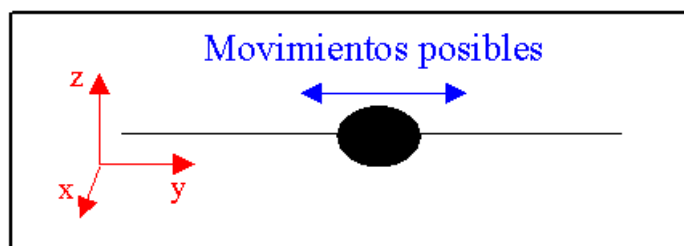
### 2.1. Grados de libertad, ligaduras y coordenadas generalizadas

#### 2.1.1. Concepto de ligadura

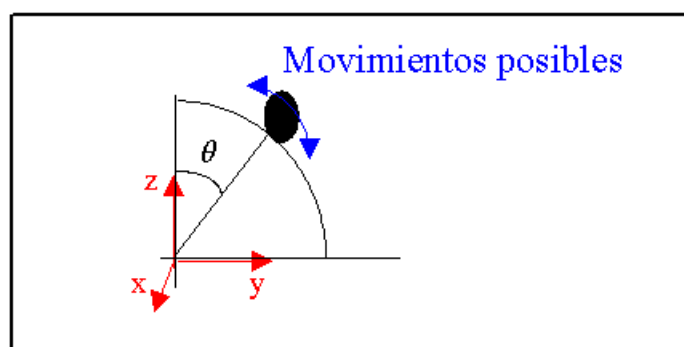
Se denominan LIGADURAS a las condiciones que restringen el movimiento de un sistema y expresan la acción de ciertas fuerzas de ligadura. Las ligaduras pueden ser de dos tipos:

- **Ligaduras estructurales o de construcción del sistema:** Son las ligaduras que están determinadas por la forma en que está construido el sistema. Sus restricciones se refieren a que los materiales del sistema resultan indeformables o inextensibles. Unos ejemplos son:

**Ejemplo 2.1.** Veamos la dinámica de un sistema formado por una varilla en la que está ensartada una cuenta que se mueve libremente por ella. La propia construcción del sistema hace que no sea posible que la cuenta se mueva en las direcciones X y Z, sino sólo en la dirección Y.

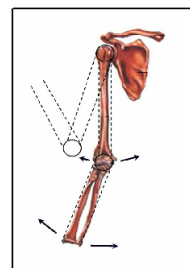


**Ejemplo 2.2.** Estudiemos ahora el movimiento de una partícula sobre una superficie semicircular. La única trayectoria que puede seguir la partícula es la de deslizarse por la superficie.

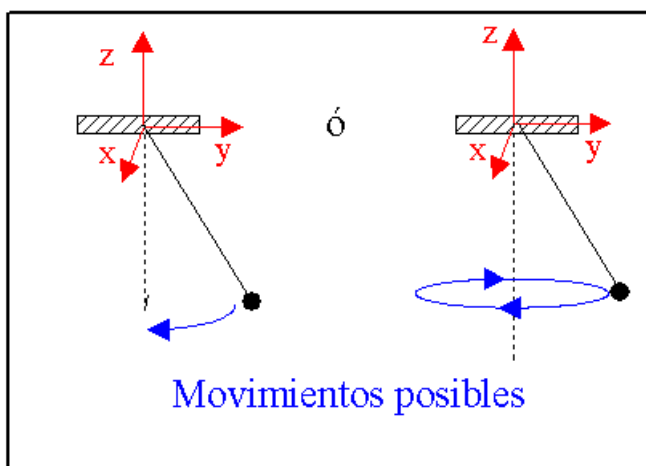


**Ejemplo 2.3.** Un ejemplo más visual puede ser nuestro propio brazo. Aunque el movimiento del conjunto puede cubrir casi todo el espacio gracias a las articulaciones, si nos fijamos en cada una de las partes del brazo, éstas sólo pueden realizar una serie de movimientos. Esto es debido a que cada hueso es indeformable y, por tanto, tienen una determinada estructura que les impide ciertos movimientos.

- **Ligaduras por el modo de activación:** Condiciones que determinan la evolución del sistema y que dependen de la forma en que ponemos en funcionamiento el mismo. Es decir, podemos encontrarnos con distintos problemas según la forma en que activemos el conjunto.

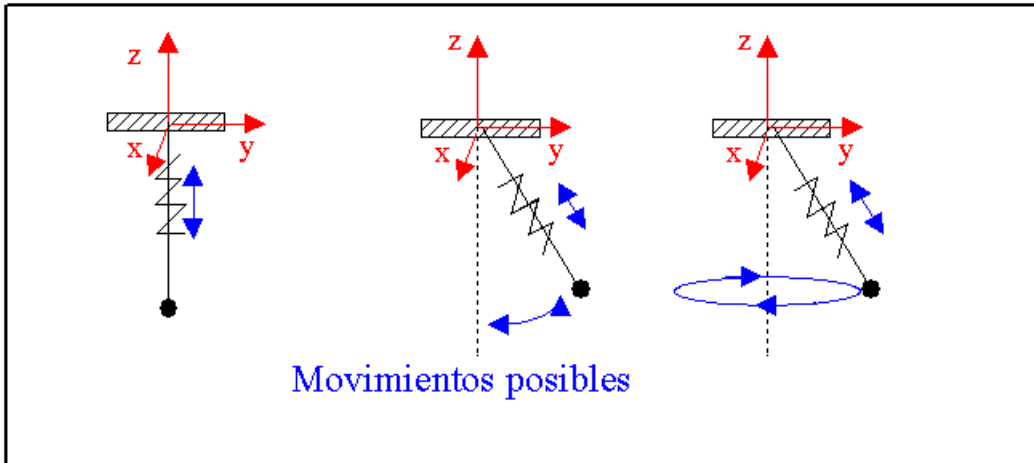


**Ejemplo 2.4.** Estudiemos el péndulo simple. Como podemos ver la dinámica del péndulo y su evolución depende de si las condiciones iniciales hacen que el péndulo se mueva sólo en el plano ZY, recorriendo arcos de circunferencia (péndulo simple), o que, sin embargo, el sistema se mueva haciendo circunferencias completas en el plano XY. Nótese que al mismo tiempo que estamos imponiendo una ligadura por activación estas introduciendo otra ligadura estructural que nos indica que el punto de suspensión del péndulo es fijo (péndulo cónico).



**Ejemplo 2.5.** Ahora veamos lo que ocurre con el péndulo elástico. En el dibujo se puede observar que dependiendo de las condiciones iniciales el péndulo puede comportarse como un péndulo simple, si la elongación inicial es nula, como un oscilador en una dimensión, si la activación es sólo en el eje z, o como un oscilador tridimensional al tener la posibilidad de oscilar y girar en las tres dimensiones.



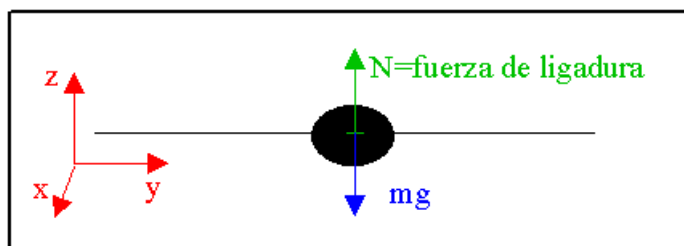


**Ejemplo 2.6.** Recordemos lo que aprendimos en el tema dedicado al análisis de los potenciales. Si suponemos que nos encontramos en un punto de equilibrio inestable inicialmente, el modo de activación condicionará la evolución del sistema. Por ejemplo, ese punto inestable podría ser la cima de una montaña que tiene a los lados dos valles. La forma en que tiremos una piedra determinará si esta cae a uno u otro valle.

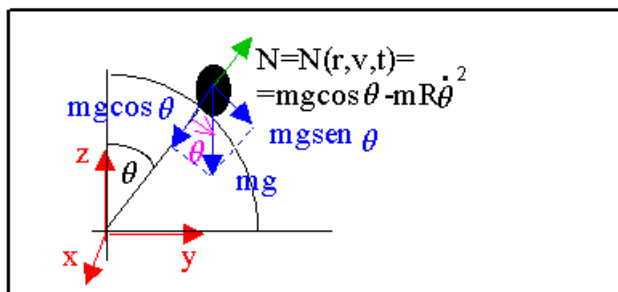
Antes de continuar debemos distinguir entre dos conceptos que nos serán de mucha utilidad, estos son:

- **Fuerzas de ligadura:** Son las fuerzas responsables de las restricciones del sistema. No aparecen directamente en la formulación lagrangiana, aunque están de forma implícita en ella y pueden calcularse mediante métodos analíticos (véase obtención de las fuerzas de ligadura a partir del método de los multiplicadores de Lagrange en el Tema 3). En general estas fuerzas, al depender de la posición y la velocidad, podemos expresarlas entonces como una función  $f = f\{r_i, \dot{r}_i, t\} = 0$

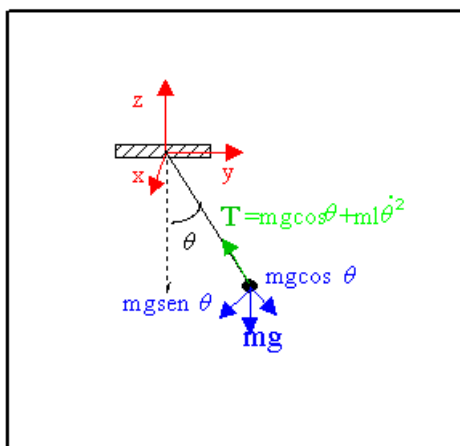
**Ejemplo 2.7.** (véase ejemplo 2.1) En este caso  $f = f\{r_i\}$ . Si por algún motivo la cuenta sufriese alguna fuerza en una dirección que no fuese la del eje Y aparecería una fuerza normal que la mantendría en la varilla, debido a que esta es indeformable.



**Ejemplo 2.8.** (véase ejemplo 2.2) La fuerza de ligadura hace que la partícula se mantenga siguiendo la superficie de la semicircunferencia, ya que es indeformable. Nótese que la fuerza normal a la misma es variable ya que depende de la posición de la partícula y de su velocidad  $f = f \{r_i, \dot{r}_i, t\} = 0$ .



**Ejemplo 2.9.** (véase ejemplo 2.4) De nuevo en este caso la fuerza de ligadura depende tanto de posiciones y como de las velocidades, es por consiguiente  $f = f \{r_i, \dot{r}_i, t\} = 0$ . Que la cuerda sea inextensible provoca que se cree una tensión en la cuerda según el movimiento de oscilación.



- **Ecuaciones de ligadura:** Describen los efectos de las fuerzas de ligadura, es decir, sus implicaciones sobre la dinámica del sistema al que se aplique una determinada fuerza. Veámoslo en los ejemplos anteriores.

**Ejemplo 2.10.** (de nuevo ejemplos 2.1 y 2.7) La aplicación de la fuerza de ligadura hace que para definir la posición de la partícula tengamos la ecuación de ligadura  $x = z = 0$ .

**Ejemplo 2.11.** (similar a 2.2 y 2.8) La imposibilidad de deformar la superficie semicircular hace que la ecuación de ligadura sea, en cartesianas,  $x^2 + y^2 = cte = R^2$ , y en polares,  $\rho = R = cte$ .

**Ejemplo 2.12.** (como en los casos 2.4 y 2.9) El equilibrio entre la tensión, la componente del peso y la componente normal de la aceleración en cada punto hace que la ecuación de ligadura sea  $r = l = cte$ . En este caso puede comprobarse que el modo de activación influye notablemente en las ligaduras, ya que si el péndulo se activa de forma que sólo oscile en el plano del papel entonces aparece una nueva restricción tal que  $x = 0$  es también una ecuación de ligadura.

**Ejercicio 2.1.** Determínese las ligaduras estructurales y alguna de las posibles ligaduras por activación de los siguientes sistemas:

1. Plano inclinado de ángulo  $\alpha$ .
2. Movimiento de un pistón en un cilindro.
3. Movimiento de una cuenta a lo largo de un anillo circular que gira alrededor de uno de los diámetros.

### 2.1.2. Clasificación de las ligaduras atendiendo a las ecuaciones de ligadura

Las ligaduras pueden clasificarse en dos tipos:

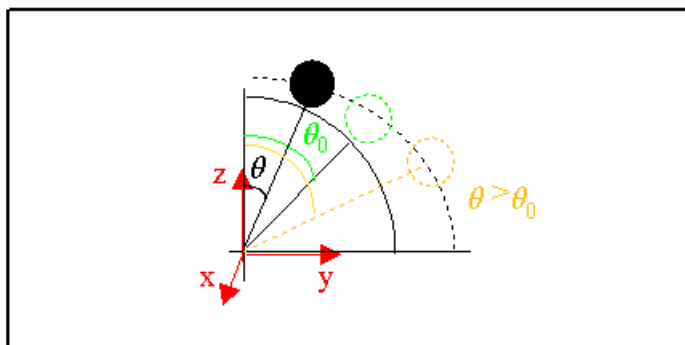
- **Unilaterales:** Aquellas en las que las relaciones entre las variables se expresan con desigualdades. Su forma más general se puede caracterizar por  $f = f\{r_i, \dot{r}_i, t\}$ . Estas ligaduras se caracterizan porque su evolución puede dividirse en dos etapas:
  - fase activada, en la que  $f = 0$ .
  - fase desactivada, en la que  $f > 0$ .

Veamos estas diferencias con más ejemplos:

**Ejemplo 2.13.** En el ejemplo 2.11 vimos que la ecuación de ligadura era  $\rho = cte$ , si bien esta restricción no se aplica indefinidamente ya que llega un momento en que la fuerza centrífuga hace que la partícula se despegue de la superficie. Analicemos esta fuerza:

$$f_{lig} = 0 \rightarrow f_{lig} = \underbrace{mg \cos \theta}_{\text{peso}} - \underbrace{\frac{mv^2}{R}}_{\text{f.centrífuga}} = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \quad (2.1)$$

durante la fase activa.



## 2 Fundamentos de la mecánica lagrangiana

Por otro lado, suponiendo que la partícula parta del reposo desde el punto A y utilizando el principio de conservación de la energía:

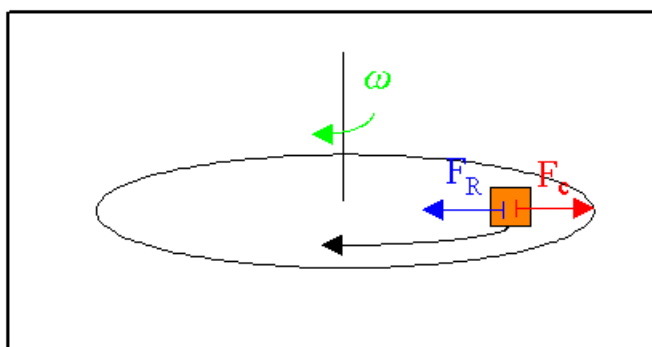
$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (2.2)$$

Si ahora despejamos  $R^2\dot{\theta}^2$  de (2.2) y lo sustituimos en (2.1) podemos entonces obtener la fuerza de ligadura  $f_{lig} = mg(3 \cos \theta - 2)$ . (De nuevo hay que hacer notar que ésta es la fuerza de ligadura, no la ecuación de ligadura). De modo que:

$$f_{lig} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_0 \simeq 48^\circ$$

Es decir, la fase activada actúa hasta que el ángulo llega a  $\theta_0 \simeq 48^\circ$ , donde comienza la fase desactivada.

**Ejemplo 2.14.** Supongamos ahora un caso de un objeto de masa  $m$  que se encuentra en reposo relativo sobre un disco que gira en el plano horizontal con velocidad  $\omega$  variable, tal como se ilustra en la figura. El objeto sufrirá una aceleración centrífuga según su distancia  $\rho$  al eje y la velocidad  $\omega$ . Dado que el objeto está en reposo en el sdr no inercial dicha aceleración centrífuga, dada por  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r\vec{h}_o)$ , se ve contrarrestada por la fuerza de rozamiento entre el objeto y el plano  $F_R = \mu N$ . Tenemos por tanto que la ecuación de ligadura es  $\rho = R = cte$  durante la fase activa, es decir, mientras el rozamiento contrarreste la fuerza centrífuga.

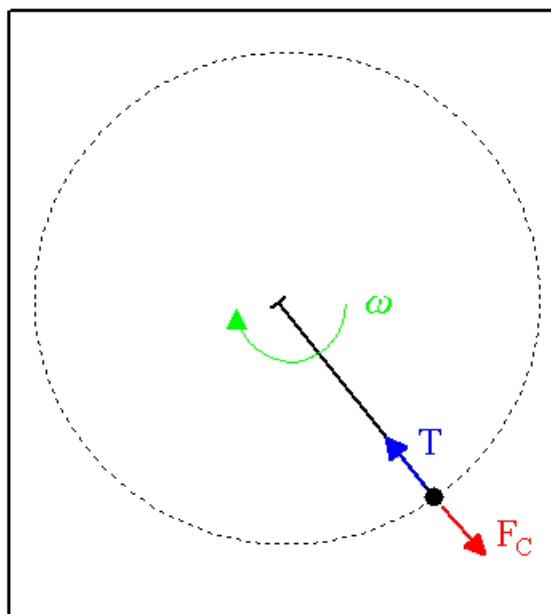


Si analizamos el movimiento, tenemos:

$$f_{lig} = 0 \rightarrow f_{lig} = \underbrace{-\mu mg}_{\text{componente del peso}} + \underbrace{m\omega^2 R}_{f. \text{ centrífuga}}$$

Entonces la fase activa dura hasta que la velocidad angular es:  $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}$ . Si, la velocidad angular entonces subiera de ese valor el rozamiento no sería suficiente para frenar al objeto y éste deslizaría hacia el exterior del disco.

**Ejemplo 2.15.** Como otro ejemplo veamos lo que ocurre cuando un objeto de masa  $m$  gira en el plano vertical atado mediante una cuerda de longitud  $L$  a un eje. Supongamos que además la cuerda como todo material tiene una determinada resistencia a la tensión, por ejemplo  $T$ . Es decir, si la tensión superase ese valor la cuerda se rompería y el objeto saldría lanzado. El movimiento queda restringido de nuevo a que el objeto se mantenga a una distancia determinada del eje (siempre que la velocidad sea suficiente). De nuevo la ecuación de ligadura es de nuevo  $\rho = cte$  durante la fase activa, como en los casos anteriores.



Entonces la ligadura permanecerá en una fase activa mientras  $T > F_{cent} \Leftrightarrow T > \frac{mv^2}{L}$ . Es fácil comprobar que el movimiento circular vertical se mantiene si  $2\sqrt{gL} < v < \frac{L}{m}$ . Para velocidades menores el objeto no llegará a culminar su movimiento mientras que para velocidades mayores se romperá la cuerda.

- **Bilaterales:** Las ecuaciones de ligaduras se expresan como una igualdad. Corresponden a la fase activada de la ligadura unilateral. Podemos dividir las ligaduras bilaterales en tres tipos:
  - **Cinemáticas:**  $f = f\{r_i, \dot{r}_i, t\}$ . Ligaduras dependientes de la posición y velocidad de la partícula y del tiempo.
  - **Geométricas:**  $f = f\{r_i, t\}$ . Ligaduras que no dependen de la velocidad pero sí de las posiciones y del tiempo.
  - **Estacionarias:**  $f = f\{r_i\}$ . Ligaduras que sólo dependen de las posiciones de las partículas.

Analícemos las diferencias entre estas ligaduras con más casos prácticos:

**Ejemplo 2.16.** Clasifiquemos las ligaduras de una polea de cuya cuerda penden dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . Sabemos que la cuerda es inextensible, por lo que la ecuación de ligadura es  $l = cte$ . Si analizamos esta expresión vemos que es una relación independiente del tiempo y de la velocidad. Por tanto se trata de una ligadura estacionaria.

**Ejemplo 2.17.** Estudiemos el mecanismo biela-manivela de la figura del que se conoce la velocidad angular de BC alrededor de B. Por el teorema del coseno:  $L^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta$  que se trata de una ecuación de 2º grado en  $x$ . Si resolvemos  $x = R \left( \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - \sin^2 \theta} \right)$  y despejando para obtener una  $f = 0$  tenemos la ecuación de ligadura es

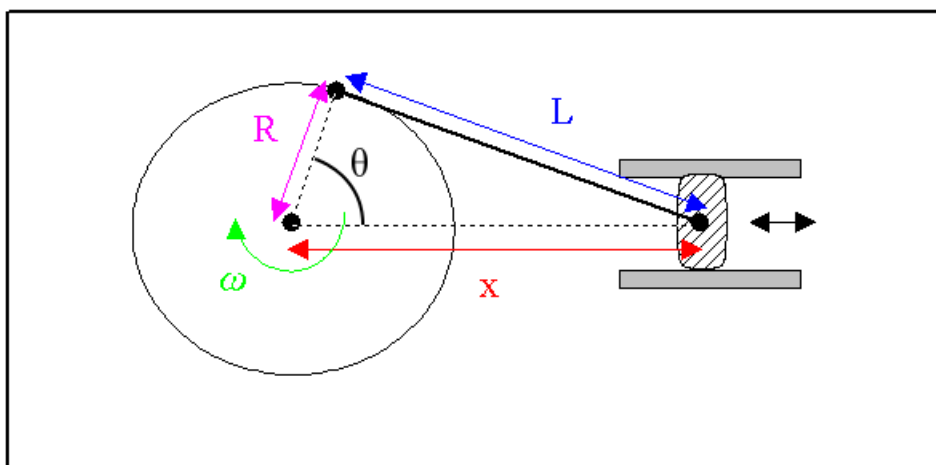
$$x - R \left( \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - \sin^2 \theta} \right) = 0$$

Veamos que se trata de una función  $f\{r_i\} = f\{x, \theta\} = 0$ . Estas expresiones no dependen de la velocidad ni del tiempo, se trata por tanto de una ligadura estacionaria (geométrica).

Podemos sin embargo transformar esta ligadura geométrica en una cinemática derivando respecto del tiempo:

$$\dot{x} + R\dot{\theta} \sin \theta \cdot \left( 1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - \sin^2 \theta}} \right) = 0$$

que es una ecuación de ligadura cinemática.



A este tipo de ligaduras se las denominan LIGADURAS CINEMÁTICAS INTEGRABLES (obtenidas por derivación de una ligadura geométrica). Así pues, las ligaduras geométricas imponen restricciones sobre las posiciones y también sobre las velocidades por medio

de la ligadura cinemática integrable asociada. Un ejemplo ilustrativo de esta situación puede verse en el *disco de Maxwell*. Para que una ligadura cinemática  $f\{r_i, \dot{r}_i, t\}$  sea cinemática integrable se debe cumplir que

$$\sum \vec{\nabla}_i f \cdot \vec{v}_i + \frac{df}{dt} \text{ sea una diferencial exacta.}$$

Nótese que lo importante de este problema es la física que está encerrada en él. El sistema transforma un movimiento rectilíneo (movimiento de la biela) en uno circular (movimiento de la manivela), o viceversa. La relevancia de esta idea en la historia del hombre ha sido enorme, ya que este mecanismo formó parte de la revolución industrial y hoy está presente en todo nuestro entorno en los pistones de todo tipo de motores.

**Ejemplo 2.18.** (véase el diagrama de los Ejemplos 2.1 y 2.2) Analicemos ahora la dinámica de una partícula sometida a una oscilación forzada ensartada en un alambre horizontal. Supongamos que esa oscilación forzosa es de forma sinusoidal. Entonces además de las ligaduras que obligan a que la partícula se mueva sobre el alambre ( $x = z = 0$ ) aparece una nueva ligadura de la forma  $y = A \cdot \sin \omega t$ . Despejando esta expresión tenemos la ecuación de ligadura  $y - A \cdot \sin \omega t = 0$ . Vemos que ésta es una función de  $f\{r_i, t\} = f\{y, t\} = 0$  y por tanto se trata de una ligadura geométrica no estacionaria (cinemática). Puede comprobarse que se puede transformar en una ligadura cinemática integrable de forma análoga al ejemplo anterior, adoptando en este caso la forma  $\dot{y} - A\omega \cos \omega t$ .

### 2.1.3. Clasificación de los sistemas mecánicos (atendiendo al tipo de ligadura)

Tomando en cuenta las consideraciones hechas en los apartados anteriores para clasificar las ligaduras, podemos diferenciar los sistemas en dos grupos:

- **Sistemas holónomos:** Un sistema se dice holónimo cuando todas sus ligaduras son geométricas o cinemáticas integrables. A su vez, existen dos tipos de sistemas holónomos:
  - **Sistemas holónomos esclerónomos:** Aquellos en las que todas sus ligaduras son estacionarias (ligaduras independientes del tiempo).
  - **Sistemas holónomos reónomos:** En los que alguna de sus ligaduras depende explícitamente del tiempo.
- **Sistemas no holónomos:** Un sistema es no holónimo cuando alguna de sus ligaduras es cinemática no integrable.

**Ejemplo 2.19.** Clasifiquemos ahora los casos vistos hasta ahora:

- **Péndulo simple:** La condición que determina que la cuerda sea inextensible es independiente del tiempo, se trata por tanto de un sistema holónimo esclerónimo.

- Podemos ver ahora el caso del movimiento de una partícula de masa  $m$  sobre una superficie esférica cuyo radio aumenta con el tiempo según la ecuación  $\rho = at$ . Véase que este caso es parecido al Ejemplo 2.13, pero sin embargo, la condición de que el radio sea variable está introduciendo elementos dinámicos del sistema. Nótese que este aspecto hace que la energía del sistema varíe con el tiempo y que por tanto no podamos aplicar el teorema de la conservación de la energía para este caso. Por tanto las restricciones del sistema dependen exclusivamente del tiempo y no de las velocidades, estamos en resumen en un sistema holónomo reónomo.
- Movimiento de una moneda sobre un plano. El movimiento viene dado por la expresión (véase [8] pag.126):

$$\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = R\dot{\theta} \quad (2.3)$$

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \quad (2.4)$$

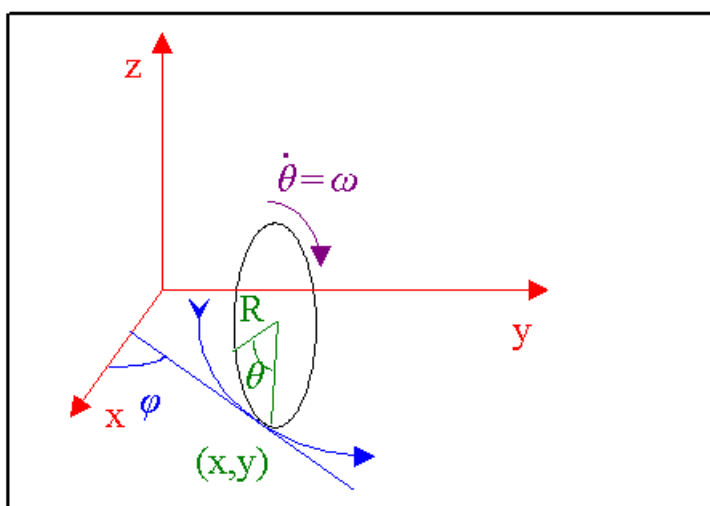
Veamos si la ligadura es integrable: De la Ecuación 2.3  $\Rightarrow dx \cos \varphi + dy \sin \varphi = R d\theta$

Del ejemplo 2.17 tenemos que, para que la ligadura sea integrable,  $\sum \vec{\nabla}_i f \cdot \vec{v}_i + \frac{df}{dt}$  debe ser diferencial exacta. Entonces:

$$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi = R d\theta \rightarrow dx \frac{\cos \varphi}{R} + dy \frac{\sin \varphi}{R} = d\theta$$

Si la diferencial es exacta  $\Rightarrow \exists \theta(x, y)$  tal que  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{R} \cos \varphi$  y  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{R} \sin \varphi$ . Sustituyendo en 2.4 tenemos:

$$dy \cos \varphi = dx \sin \varphi \Rightarrow dx \cdot R \frac{\partial \theta}{\partial y} = dy \cdot R \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial y} \Leftrightarrow x = y$$



Como conclusión obtenemos que, en general, el movimiento de la moneda no es una diferencial exacta, es decir, la ligadura es cinemática no integrable. Por tanto,



el sistema es en general no holónomo. Sólo si  $x = y$  (trayectoria recta) existe la diferencial exacta y la ligadura es cinemática integrable. Por tanto, el sistema es en general no holónomo. En tal caso las ecuaciones 2.3 y 2.4 se resumen en la forma  $\dot{x} = R\dot{\theta}$  y obtenemos la ligadura geométrica estacionaria  $x = R\theta + x_0$ . Dicha ligadura determina, por ejemplo, la dinámica del *disco de Maxwell*.

#### 2.1.4. Grados de libertad de un sistema y coordenada generalizada

Como hemos dicho en los apartados anteriores, el imponer una serie de ligaduras esta introduciendo una serie de restricciones en el normal movimiento de un sistema. Esto provoca que no todos los movimientos sean posibles y que éstos tengan que estar sujetos a una serie de ecuaciones. Así pues, las ecuaciones dinámicas expresadas en términos de las coordenadas cartesianas dejan de ser independientes. En este punto se hace conveniente introducir una serie de coordenadas. A estas nuevas coordenadas se les llamará COORDENADAS GENERALIZADAS. Estas coordenadas deben expresar de la mejor forma posible las transferencias de energía del sistema. En términos de estas nuevas variables no aparece explícitamente las fuerzas de ligadura, pero por su propia definición estas fuerzas están implícitamente contenidas en las ecuaciones del movimiento del sistema descritas con las coordenadas generalizadas. Una noción íntimamente ligada a la de coordenada generalizada es el concepto de GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA. En un sistema con  $k$  ecuaciones de ligadura y  $N$  partículas se definen como  $g = 3N - k$ . Analicemos esta ecuación:

- $g$  = grados de libertad
- $3N$  = movimientos posibles de cada partícula. El factor tres indica que puede moverse en las tres dimensiones.
- $k$  = número de ecuaciones de ligadura

Esta relación es evidente si tenemos en cuenta que cada ecuación de ligadura limita el movimiento del sistema en una dimensión. Los grados de libertad se definen por tanto como el número de coordenadas independientes que caracterizan a un sistema.

**Ejemplo 2.20.** Volvamos al caso típico del péndulo simple. Del ejemplo 2.9. tenemos que las ecuaciones de ligadura son  $z = 0$  y  $\rho = l = cte$ . Por tanto tenemos  $g = 3N - k = 3 \cdot 1 - 2 = 1gdl$ , por lo que tenemos que definir una sola coordenada generalizada que tomaremos como  $q_i = \{\theta\}$ . Si recordamos el estudio del péndulo simple efectuado en el tema 1 (potenciales unidimensionales) vemos que dicha coordenada describe de forma muy adecuada la variación de la energía potencial del sistema.

**Ejemplo 2.21.** Para el caso de los péndulos acoplados tenemos una serie de ecuaciones de ligadura:

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$L_1 = L_2 = cte$$

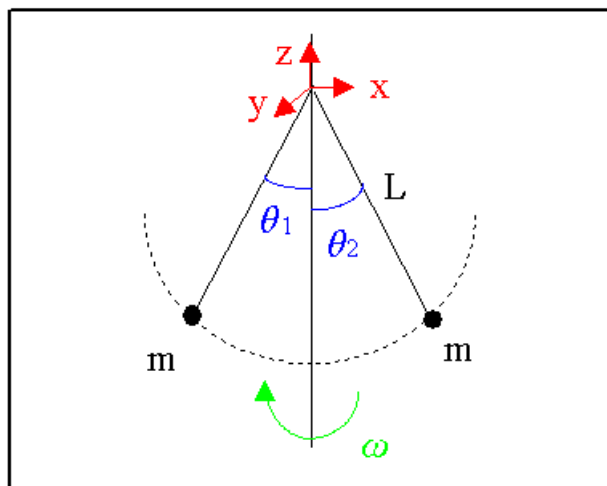
que significan que ambos péndulos se mueven en el plano vertical y que la longitud de cada péndulo es constante (son cuatro ecuaciones de ligadura).

Teniendo en cuenta estas consideraciones y que en este caso tenemos dos partículas, el sistema tiene entonces

$$g = 3N - k = 3 \cdot 2 - 4 = 2\text{gdl}$$

como veremos al analizar posteriormente el sistema, la mejor forma de describir el movimiento del sistema queda bien determinada si tomamos como coordenadas generalizadas  $q_i = \{\theta, \varphi\}$ , en analogía con el péndulo simple.

**Ejemplo 2.22.** Estudiemos ahora el regulador centrífugo. Éste es un sistema formado por dos partículas. La construcción del sistema sugiere que utilicemos coordenadas esféricas para simplificar las ecuaciones de transformación. Si utilizamos un sistema de referencia centrado en el punto superior del regulador en estas coordenadas tenemos que  $\rho_1 = \rho_2 = L = \text{cte}$  y  $\varphi_1 = \varphi_2 = \omega t$ . Además no es difícil darse cuenta de que, si ambas masas son iguales,  $\theta_1 = \theta_2$ . Por tanto tenemos  $g = 3N - k = 3 \cdot 2 - 5 = 1\text{gdl}$  y tomamos como coordenada generalizada  $q_i = \{\theta\}$ .



**Ejercicio 2.2.** Clasifique las ligaduras de los sistemas de los Ejemplos 2.20, 2.21 y 2.22. Clasifique además cada sistema atendiendo a los tipos de ligadura obtenidos anteriormente.

## 2.2. Principio de los trabajos virtuales y principio de D’Alambert

En esta sección se tratarán unos de los principios más importantes de la física, el principio de D’Alambert basado a su vez en el principio de los trabajos virtuales. Más que por su importancia práctica directa este principio tiene tanta relevancia debido a que es la base que lleva a enunciar la mecánica analítica.

Antes de profundizar en este tema nos es necesario introducir una serie de breves conceptos y diferencias entre ellos:

- DESPLAZAMIENTOS Y VELOCIDADES POSIBLES. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL. A partir de un sistema con ecuaciones de ligadura tales que  $f\{r_i, \dot{r}_i, t\} = 0$  como caso más general, consideremos las restricciones sobre las velocidades expresadas en la forma (ligadura cinemática general):

$$\boxed{\sum \vec{a}_{ki} \cdot \vec{v}_i + a_{k0} = 0}$$

donde existen k ecuaciones de ligadura y donde los coeficientes  $a_{ki}$  describen la naturaleza específica de las ligaduras consideradas, mientras que  $a_{k0}$  describe la dependencia temporal de dichas ligaduras.

Véase, por ejemplo, el caso de la moneda rodando por un plano (ejemplo 2.19):

Recordemos que teníamos:  $\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = R\dot{\theta}$  (a);  $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$  (b) y  $\dot{\theta} = \dot{\theta}$  (c).

Poniendo las tres expresiones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -R \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Como vemos, como las ligaduras no dependen del tiempo explícitamente  $a_{k0}$ . (Nota: Se ha añadido la ecuación (c) para completar el sistema  $3 \times 3$ ).

La condición anterior  $\sum \vec{a}_{ki} \cdot \vec{v}_i + a_{k0} = 0$  determina las VELOCIDADES POSIBLES del sistema, es decir, sólo las velocidades que cumplen esta ecuación son permitidas. A partir de ella podemos obtener también una ecuación para los DESPLAZAMIENTOS POSIBLES sin más que multiplicar por  $dt_i$  en ambos miembros:

$$\underbrace{\sum \vec{a}_{ki} \cdot \vec{v}_i + a_{k0}}_{\text{velocidades posibles}} = \sum \vec{a}_{ki} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + a_{k0} = 0 \xRightarrow{\cdot dt} \underbrace{\sum \vec{a}_{ki} \cdot d\vec{r}_i + a_{k0} \cdot dt}_{\text{desplazamientos posibles}} = 0$$

En el ejemplo del disco rodando sobre el plano tendremos:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -R \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} (*) \xRightarrow{\cdot dt} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -R \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\theta \end{pmatrix} (**)$$

Resolviendo (\*\*) por Cramer obtenemos:  $\begin{cases} dx = Rd\theta \cos \varphi \\ dy = Rd\theta \sin \varphi \end{cases}$

Estas relaciones describen explícitamente los desplazamientos posibles del punto A sobre el plano. Nótese que los desplazamientos posibles del disco dependen del tiempo a través de la variación de  $\varphi = \varphi(t)$ .

Aplicando esto a dos puntos del plano, tenemos que para el punto (A):

$$d\vec{r} = R d\theta \left( \cos \varphi \cdot \hat{i} + \sin \varphi \cdot \hat{j} \right)$$

De forma análoga para otro punto (B):

$$d\vec{r}' = R d\theta \left( \cos \varphi' \cdot \hat{i} + \sin \varphi' \cdot \hat{j} \right)$$

Supongamos por un momento que ambos desplazamientos se producen al mismo tiempo (en tal caso  $a_{k0} = 0$ , por definición). En realidad sabemos que esto no es posible pero imaginémoslo como válido. Entonces podemos definir el desplazamiento virtual como:

$$\sum \vec{a}_{ki} \cdot d\vec{r}_i + a_{k0} \cdot dt - \sum \vec{a}_{ki} \cdot d\vec{r}'_i + a_{k0} \cdot dt = \sum \vec{a}_{ki} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}'_i) + a_{k0} \cdot dt = \sum \vec{a}_{ki} \cdot \delta\vec{r}_i$$

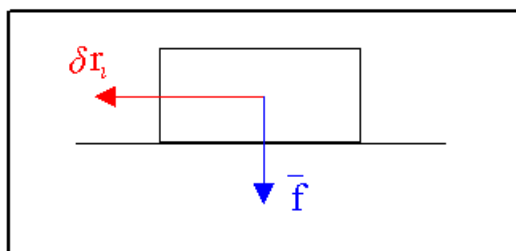
Por tanto:  $\left[ \sum \vec{a}_{ki} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}'_i) + a_{k0} \cdot dt = \sum \vec{a}_{ki} \cdot \delta\vec{r}_i \right]$  define un DESPLAZAMIENTO VIRTUAL compatible con las ligaduras del sistema.

Este desplazamiento virtual  $\delta\vec{r}_i$  recibe tal nombre porque está fuera de todo tiempo ya que involucra procesos que en la realidad se producen uno después de otro.

### 2.2.1. Principio de los trabajos virtuales (J. Bernoulli, 1717)

Sean  $\vec{F}_i$  la resultante de las fuerzas que no son de ligadura y sea  $\vec{f}_i$  la resultante de las fuerzas que sí son de ligadura. Se definen las fuerzas de ligadura ideales a las fuerzas de ligadura que no realizan trabajo cualquiera que sea el desplazamiento virtual del sistema:

$$\vec{f} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta\vec{r}_i$$



La condición necesaria y suficiente para que el sistema se encuentre en equilibrio es que se anule la suma de los trabajos realizados por las fuerzas  $\vec{F}_i$  ejercidas sobre cada partícula del sistema.

Podemos definir en este punto el trabajo virtual como el producto de  $\delta W_{virtual} = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i$ .

Reformulando ahora la condición de equilibrio a partir de los trabajos virtuales tenemos que un sistema se encuentra en equilibrio si los trabajos realizados por las fuerzas

$\vec{F}_i$  se anulen para todo desplazamiento virtual compatible con todas las ligaduras del sistema.

$$\sum \vec{F}_T \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{lig. ideales}} \boxed{\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_i}$$

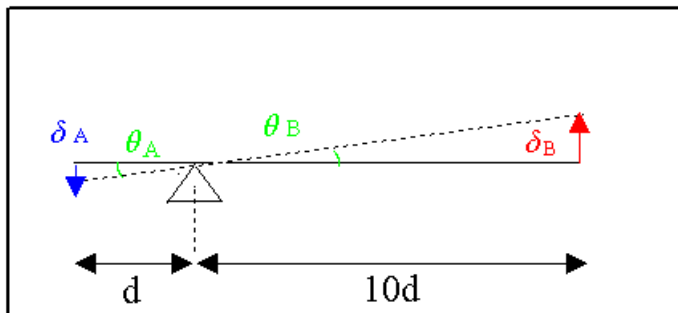
Que define el PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

Demostración:

- Supongamos que el sistema está en equilibrio:  $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m \cdot \vec{a}_i = 0 \Rightarrow \sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ ; donde  $\sum \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$  por ser ideales.
- Si no estamos en equilibrio:  $\underbrace{\sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i)}_{=m \cdot a_i} \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_i}_{=\alpha \cdot a_i} = \sum m \cdot \alpha \cdot a_i^2 \neq 0$

A continuación, y a modo de ilustración, se muestran unos ejemplos de utilización del principio de los trabajos virtuales. Su aplicación más común es la determinación de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico.

**Ejemplo 2.23.** Aunque conozcamos las leyes de la palanca utilizemos lo aprendido en esta sección para determinar el equilibrio del sistema que se muestra en la figura.

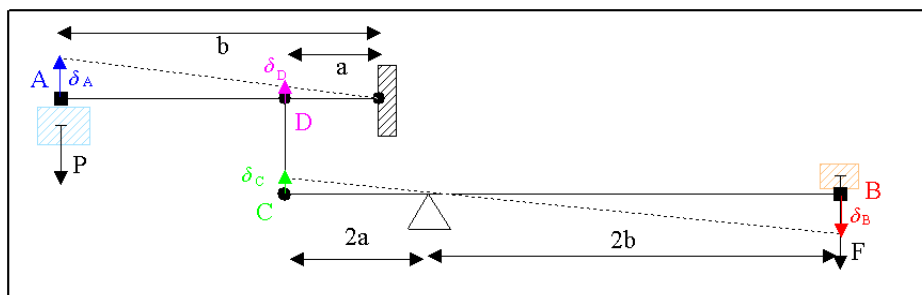


Del principio de los trabajos virtuales sabemos que  $\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_i$ . Los desplazamientos compatibles con las ligaduras del sistema son  $\delta_A$  y  $\delta_B$ . Por tanto, para este caso tenemos que  $F_A \cdot \delta_A + F_B \cdot \delta_B = 0 \quad \forall \delta_i$ . De la figura se deduce que  $d\theta_A = \frac{\delta_A}{d}$  y  $d\theta_B = \frac{\delta_B}{10d}$  (para ángulos pequeños). Además sabemos que  $-d\theta_B = d\theta_A$ . Entonces, de la suma de los trabajos virtuales tenemos que  $F_A \delta_A + F_B \delta_B = F_A \cdot d\theta_A \cdot d + F_B \cdot d\theta_B \cdot 10d = F_A \cdot d\theta_A \cdot d - F_B \cdot d\theta_A \cdot 10d = (F_A - 10F_B) d \cdot d\theta_A = 0$ .

Por lo que:  $\sum F_i \cdot \delta_i = 0 \Leftrightarrow F_A - 10F_B = 0 \Leftrightarrow F_A = 10F_B \Leftrightarrow m_A \cdot g = 10m_B \cdot g$ . Por tanto, el equilibrio se alcanza si y sólo si

$$\boxed{m_A = 10m_B}$$

**Ejemplo 2.24.** Estos problemas pueden complicarse infinitamente, pero para terminar de ilustrar un poco más esta sección utilizaremos un mecanismo algo más complejo que el anterior (su esquema se muestra en la figura).



El sistema mostrado podría servir para elevar un peso. Determinemos la fuerza necesaria para elevar un grave. Las fuerzas  $F$  y  $P$  son la fuerza aplicada y el peso elevado respectivamente. La fuerza  $F$  aplicada sobre el punto  $B$  produciría en el sistema un desplazamiento  $\delta_B$  de la barra. Este desplazamiento tendrá un efecto sobre el sistema tal que tendrá como resultado un desplazamiento  $\delta_A$  del peso a elevar. (Se puede ver que los únicos desplazamientos compatibles con las ligaduras del sistema y no ortogonales son los mencionado  $\delta_A$  y  $\delta_B$ .)

Por el principio de los trabajos virtuales debe ocurrir que  $\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \forall \delta \vec{r}_i$ . Por tanto, introduciendo las fuerzas aplicadas y los desplazamientos virtuales tenemos que  $\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = P \cdot \delta_A + F \cdot \delta_B$ .

Vemos que  $\delta_B$  produce un desplazamiento en el punto  $C$ . Por semejanza de triángulos tenemos que  $-\frac{\delta_B}{2b} = \frac{\delta_C}{2a} \Rightarrow \delta_B = -\frac{2b}{a}\delta_C$ . El movimiento del punto  $C$  se transmite a  $D$  mediante una barra rígida que obliga a que  $\delta_C = \delta_D$  y por tanto  $\delta_B = -\frac{2b}{a}\delta_D$ . De nuevo por semejanza obtenemos  $\frac{\delta_A}{b} = \frac{\delta_D}{a} \Rightarrow \delta_D = \frac{a}{b}\delta_A$  y entonces  $\delta_B = -\frac{2b}{a}\delta_D = -2\delta_A$ .

Sustituyendo estos valores en la expresión de los trabajos virtuales  $P \cdot \delta_A + F \cdot \delta_B = 0$ , y por consiguiente

$$F = \frac{P}{2}$$

que nos indica que el peso que podemos elevar es el de una masa que no duplique la fuerza que ejercemos en la palanca.

Se podrían dar numerosos ejemplos resolubles por el principio de los trabajos virtuales, incluso se podría desarrollar gran parte de la mecánica de este curso a través de dicho principio y el principio de D'Alambert. Pero, aunque en los ejercicios anteriores no hemos podido verlo, surgen numerosos problemas de cálculo y resultan muy farragosos para sistemas más complejos. Sin embargo, como se verá más adelante, la mecánica lagrangiana solucionará todos estos problemas y se mostrará como un método mucho más práctico y simple que éste.

### 2.2.2. Principio de D’Alambert

**Jean le Rond D’Alambert (París 1717- París 1783)**

Fue criado por una familia humilde, aunque era hijo ilegítimo de un aristócrata, que más tarde le costearía la carrera. Años más tarde, cuando sus talentos se hicieron evidentes, su madre intentó reclamarlo pero él la rechazó diciendo “Mi madre es la mujer del vidriero”. Fue admitido en la academia de ciencias en 1741. Trabajó en la teoría gravitatoria especialmente en lo concerniente a la precesión de los equinoccios. En cuanto a la mecánica, formuló el principio que lleva su nombre y que es la base de toda la mecánica analítica sobre la que se fundaron los estudios de Lagrange. En otros campos hay que destacar el trabajo realizado junto con Diderot en la elaboración de “La Gran Enciclopedia Universal”.



Hasta el momento en que D’Alambert formula su principio las fuerzas que actúan sobre un sistema que producen un determinado efecto pueden describirse mediante la expresión:  $\underbrace{\vec{F}_i + \vec{f}_i}_{\text{causas}} = \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\text{efectos}}$ .

Es decir, la aplicación de una determinada fuerza provoca un cambio en los momentos o estados dinámicos de las partículas. De momento no se ha dicho nada nuevo que no sepamos.

El gran avance que introdujo este principio es el de incluir tanto causas como efectos en un todo para así poder transformar un sistema dinámico en uno estático de mayor facilidad de resolución:

$$\underbrace{\vec{F}_i + \vec{f}_i}_{\text{causas}} = \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\text{efectos}} \Rightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}} + \vec{f}_i = 0 \text{ por tanto ahora } \underbrace{\vec{F}_i - \dot{\vec{p}} + \vec{f}_i}_{\substack{\text{causas} \\ \text{sis. estático}}} = 0$$

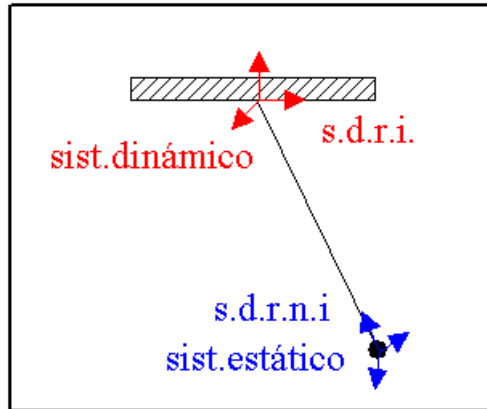
Aplicando ahora el principio de los trabajos virtuales:

$$\sum F_T \cdot \delta r_i = \sum (\underbrace{\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}}_{=0 \text{ por ser ideales}} + \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{causas}}) \cdot \vec{r}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Que es el conocido como **Principio de D’Alambert**.

Esta nueva interpretación supone un cambio de mentalidad muy fuerte, hemos pasado de resolver un sistema dinámico a resolver un sistema estático, para ello hemos abandonado un sistema de referencia inercial para introducirnos en uno no inercial.

Esto se puede ver en el caso del péndulo que se muestra en la figura.

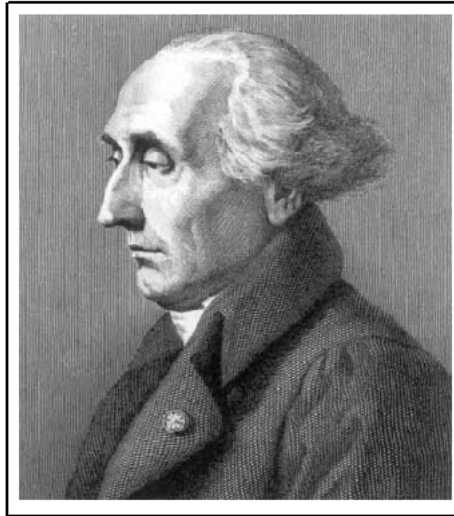




## 2.3. Ecuaciones de Lagrange

**Joseph Louis de Lagrange (Piamonte 1736 - París 1813)**

Aunque de ascendencia francesa, nace y crece en el reino italiano de Piamonte. Desde el colegio descubrió su vocación por las matemáticas tras leer un ensayo de Halley. A los dieciocho años ya está dando clases en la escuela de Artillería de Turín. La habilidad matemática de Lagrange fue muy pronto reconocida por Euler, que por entonces era director de la Academia de Ciencias de Berlín, plaza que ocuparía más tarde Lagrange.



Lagrange aplicó su soltura matemática para realizar una sistematización de la mecánica, que ya había empezado Galileo. Utilizando el análisis de variaciones, que él mismo había desarrollado junto con Euler, dedujo unas ecuaciones muy generales con las que se podían resolver todos los problemas de la mecánica. Reunió todos los métodos en el libro que tituló “Mecánica Analítica” (1788), el cual era un libro puramente analítico.

La otra gran contribución a la física de este estupendo científico fue el desarrollo del problema de los dos cuerpos así como el cálculo de perturbaciones, aplicado a problemas astrofísicos.

En la última etapa de su vida dirigió una comisión que estudiaría el nuevo sistema de pesos y medidas. Unos años antes de morir fue nombrado conde por Napoleón.

Sea un sistema de  $N$  partículas y un conjunto de  $\{\vec{r}_i\}$  de vectores de posición de las partículas. Como vimos en las secciones precedentes podemos encontrar siempre una serie  $\{q_i\}$ , llamadas **coordenadas generalizadas**, que serán aquellas que mejor describan la evolución energética del sistema.

$$g = 3N - k \Rightarrow \{\dot{q}_i\} \text{Coordenadas generalizadas con } j=1, \dots, g \quad (2.5)$$

Podemos establecer una relación entre los vectores  $\{\dot{\vec{r}}_i\}$  y las coordenadas generalizadas  $\{\dot{q}_i\}$  mediante las ecuaciones de ligadura:

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \rightarrow \{\dot{\vec{r}}_i\} = \{\dot{\vec{r}}_i\}(q_1, \dots, q_n, t) \quad (2.6)$$

Derivando 2.6 respecto del tiempo t:

$$\vec{v}_i = \{\dot{\vec{r}}_i\} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (2.7)$$

Donde  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial t} = \vec{\nabla}_j r_i$

Por otro lado, el desplazamiento virtual a partir de 2.6 considera sólo las variaciones sobre las coordenadas, no sobre el tiempo, por consiguiente:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.8)$$

Del principio de D'Alambert sabemos que para un sistema de masa constante:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^g \left\{ \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - m \cdot \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde se ha utilizado la ecuación (2.8).

Expresión que nos da los trabajos virtuales a partir de las coordenadas generalizadas.

Definiendo las FUERZAS GENERALIZADAS como  $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Además:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i} \right) - \vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left\{ \left( \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Donde se han utilizado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} + \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (2.9) tendremos:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^g \left\{ Q_j - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = 0$$

Como los desplazamientos virtuales son en general no nulos y linealmente independientes entre si, la expresión anterior es cero si y sólo si la expresión entre corchetes es siempre nula, es decir, si:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right)$$

A estas ecuaciones se las conoce como las ECUACIONES DE LAGRANGE.

Si las fuerzas provienen de un potencial vimos que podíamos expresarlas como el gradiente de este mismo potencial de la forma  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$ . Teniendo en cuenta esto, las fuerzas generalizadas quedan como (siempre que provengan de un potencial, es decir, siempre que sean conservativas):

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial r_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta_{ij} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Por tanto podemos escribir las ecuaciones de Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Y si U no depende de  $\dot{q}_j$  entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) \right) = 0 \quad (2.10)$$

Podemos definir ahora una nueva función  $L = T - U$ , que se conoce como el LAGRANGIANO DEL SISTEMA. Dicho lagrangiano expresará la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema. Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.11) nos permitirán abordar todo tipo de problemas para sistemas dinámicos conservativos.

Para sistemas generales en los que existan tanto fuerzas conservativas como no conservativas tendremos que tener en cuenta que no podremos expresar todas las fuerzas

presentes en el sistema a partir de un potencial, por lo que:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = \tilde{Q}_j$

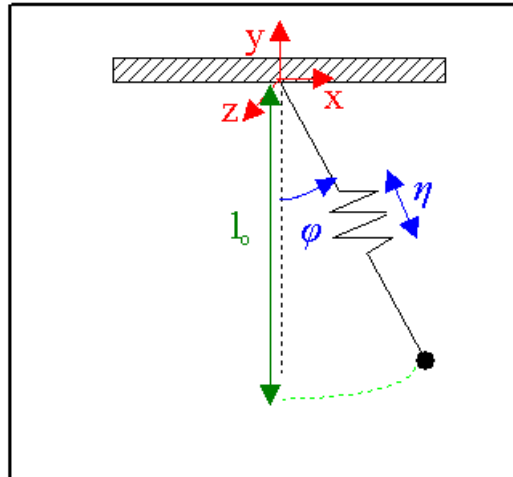
Que expresará las **ecuaciones generalizadas de Lagrange para fuerzas no conservativas**  $\tilde{Q}_j$ .

Mediante lo aprendido hasta este momento durante el desarrollo de este tema ya podemos establecer unas pautas a seguir cuanto “ataquemos” un problema de mecánica mediante la formulación lagrangiana. Este proceso podríamos dividirlo en varios pasos:

1. Determinación del número ( $N$ ) de partículas u objetos (puntos materiales) que componen nuestro sistema.
2. Realización de un esquema del sistema. (La intuición a cerca de hacia donde podría moverse o actuar nuestro sistema puede ser útil aunque en otras ocasiones podría confundirnos e incluso podría hacer que cometiésemos errores)
3. Obtención de las ecuaciones de ligadura ( $k$ ).
4. Dedución de los grados de libertad del sistema  $g = 3N - k$  y elección de las coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$ .
5. Obtención de las coordenadas cartesianas, mediante ecuaciones de transformación, en función de las coordenadas generalizadas,  $x_i = x_i(q_j)$ .
6. Obtención de la energía potencial  $U$  y de la energía cinética, así como del lagrangiano del sistema  $L = T - U$  (dicho Lagrangiano nos proporcionará numerosas información, como veremos más adelante).
7. Planteamiento de las ecuaciones de Lagrange a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.11), para deducir posteriormente las ecuaciones del movimiento.

### Ejemplo 2.25. (Problema “tipo 1”): péndulo elástico.

Elegimos un modo de activación tal que el péndulo oscila debido a la fuerza recuperadora del muelle y alrededor de la vertical. Tenemos por consiguiente que el movimiento queda confinado en el plano vertical del papel (la ecuación de ligadura es  $z = 0$ ). Por tanto, tendremos que  $N = 1$  partículas y  $k = 1$  ecuaciones de ligadura, por lo que  $g = 3N - k = 3 - 1 = 2$  gdl. A partir de estas consideraciones necesitaremos 2 coordenadas generalizadas que nos permitan describir de la mejor forma posible la evolución del sistema, que para este caso serán  $q_i = \{\eta, \varphi\}$ . En este caso el sistema formado por el péndulo elástico es un sistema holónomo esclerónomo.



Describamos ahora la posición del péndulo en cada instante a partir de las coordenadas generalizadas:

$$x = (l_0 + \eta) \sin \varphi \quad (2.12)$$

$$y = -(l_0 + \eta) \cos \varphi \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) forman las ecuaciones de transformación del sistema. Derivando estas ecuaciones respecto del tiempo tendremos:

$$\dot{x} = \dot{\eta} \sin \varphi + (l_0 + \eta) \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (2.14)$$

$$\dot{y} = -\dot{\eta} \cos \varphi + (l_0 + \eta) \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (2.15)$$

Podemos ahora expresar la energía cinética del sistema a partir de las ecuaciones (2.14) y (2.15):

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{\eta}^2 + (l_0 + \eta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2) \quad (2.16)$$

Mientras que la energía potencial queda como:

$$U = \underbrace{U_g}_{E.P.Gravitatoria} + \underbrace{U_e}_{E.P.elástica} = -mg \cdot (l_0 + \eta) \cos \varphi + \frac{1}{2} k \eta^2 \quad (2.17)$$

Recordando que el lagrangiano del sistema lo habíamos definido como  $L \equiv T - U$ :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{\eta}^2 + (l_0 + \eta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2) + mg \cdot (l_0 + \eta) \cos \varphi - \frac{1}{2} k \eta^2$$

Si analizamos el lagrangiano del sistema, observamos que éste depende de  $L = L(\eta, \varphi, \dot{\eta}, \dot{\varphi})$ . Es por tanto independiente del tiempo, una característica de los sistemas esclerónomos. Como veremos en los temas siguientes, el que no aparezca explícitamente el tiempo en el lagrangiano determina que la energía total del sistema se conserve a lo largo del movimiento.

Las ecuaciones del movimiento del sistema quedan ahora determinadas derivando respecto del tiempo las coordenadas generalizadas.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m \cdot \dot{\eta} \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} = m(l_0 + \eta)\dot{\varphi}^2 + mg \cdot \cos \varphi - k\eta$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow m\ddot{\eta} - m(l_0 + \eta)\dot{\varphi}^2 - mg \cdot \cos \varphi + k\eta = 0 \quad (2.18)$$

De la misma forma, para la coordenada  $\varphi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot (l_0 + \eta)^2 \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(l_0 + \eta) \sin \varphi$$

Y sustituyendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \Rightarrow 2m \cdot (l_0 + \eta)\dot{\varphi}\ddot{\eta} + m(l_0 + \eta)^2 \ddot{\varphi} + mg(l_0 + \eta) \sin \varphi = 0 \quad (2.19)$$

Entonces las ecuaciones (2.18) y (2.19) formarán las ecuaciones dinámicas del sistema. Toda la información a cerca del movimiento del péndulo se encuentra contenida en estas expresiones.

Nótese que si en todo el desarrollo del problema se sustituye el valor de  $\eta = 0 \Rightarrow \dot{\eta} = \ddot{\eta} = 0$ , el problema se convertiría en un péndulo simple de longitud  $l_0$ . En ese caso tendríamos que, según las ecuaciones (2.18) y (2.19):

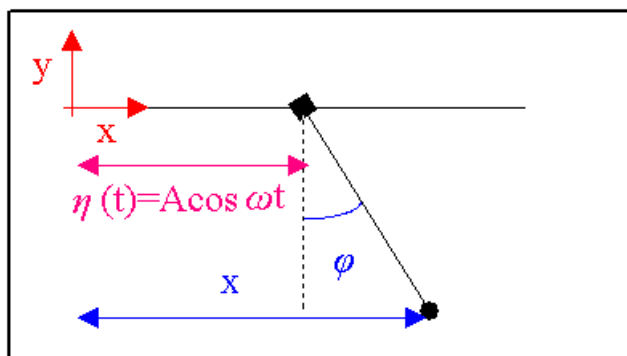
$$\underbrace{l_0 \cdot \dot{\varphi}^2}_{Ac. radial} + \underbrace{g \cos \varphi}_{Tensión} = 0$$

$$\underbrace{l_0 \cdot \ddot{\varphi}}_{Ac. angular} + \underbrace{mg \sin \varphi}_{Componente del peso} = 0$$

**Ejercicio 2.3.** Resolver en coordenadas cartesianas el problema anterior y discutir en qué caso resulta más conveniente la elección de unas coordenadas u otras y por qué. Para ampliar su información puede consultarse el artículo [9].

**Ejemplo 2.26. (Problema “tipo 2”): péndulo cuyo punto de suspensión sufre una oscilación forzada.**

De nuevo, el modo de activación impone la ligadura  $z = 0$ . Los grados de libertad del sistema serán entonces  $g = 3N - k = 3 - 1 = 2gdl$  (ojo!! como veremos al final esto no corresponde a la realidad, cuando imponemos la expresión  $\eta(t) = A \cos \omega t$  estamos introduciendo una ligadura estructural en el sistema). Tenemos por tanto dos coordenadas generalizadas  $q_i = \{x, \varphi\}$ .



Actuando de forma similar al ejemplo 2.25, las ecuaciones de transformación en estas coordenadas son:

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta(t) + l \sin \varphi & \longrightarrow & & x(t) &= A \cos \omega t + l \sin \varphi \\ y(t) &= -l \cos \varphi & \text{sustituyendo} & & y(t) &= -l \cos \varphi \end{aligned}$$

Y derivando estas expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A\omega \sin \omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y}(t) &= l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

Podemos ver que el tiempo aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación. El sistema es, por tanto, holónomo reónomo.

A partir de estas ecuaciones las energías cinética y potencial podemos expresarlas como:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2A\omega l \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t)$$

$$U = mgh = mgy = -mgl \cos \varphi$$

Con estos resultados podemos obtener de forma inmediata el lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2A\omega l \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t) + mgl \cos \varphi \quad (2.20)$$

Analizando este resultado podemos ver que el lagrangiano es una función  $L = L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ , que como vemos no depende de la coordenada generalizada  $\{x\}$ . Habrá por tanto una sola

ecuación de Lagrange. Se demuestra por consiguiente que hay un sólo grado de libertad  $g = 1$ , al contrario de lo que creía en un principio, en que se establecieron  $g = 2$  gdl. Esto se debe a que, como ya se había avisado con anterioridad,  $\eta(t)$  impone características dinámicas del sistema.

La ecuación dinámica del sistema es entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\omega l \dot{\varphi} A \sin \varphi \sin \omega t - mgl \sin \varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} - m\omega l A \cos \varphi \sin \omega t$$

Y sustituyendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{A}{l} \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t \quad (2.21)$$

Este problema ilustra la dinámica de un sistema reónomo. En el caso de oscilaciones pequeñas ( $\varphi \rightarrow 0$ ), y llamando  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$  a la frecuencia característica del péndulo, la Ecuación (2.21) se reduce a la forma lineal  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{A}{l} \omega^2 \cos \omega t$ , que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico forzado.



## 2.4. Sistemas naturales

Hasta ahora hemos visto dos tipos de sistemas atendiendo a sus grados de libertad:

- **Caso A:** Recordemos que para el péndulo elástico teníamos:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + (l_0 + \eta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2)$$

- **Caso B:** Mientras que para el caso del problema tipo 2:

$$T = \frac{1}{2}(A^2\omega^2 \sin^2 \omega t + l^2\dot{\varphi}^2 - 2A\omega l\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t)$$

Veamos la estructura de la energía del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = 0$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left\{ \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right\}^2 = T_2 + T_1 + T_0$$

Con ecuaciones de transformación tales que:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow \vec{v}_i = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Donde se han denominado a las energías  $T_2, T_1$  y  $T_0$  como (véase [10], página 25):

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} \cdot \dot{q}_j \dot{q}_k$$

siendo

$$A_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

y  $T_2$  una forma que depende cuadráticamente de las velocidades.

$$T_1 = \sum_i m_i \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j$$

donde  $T_1$  depende linealmente de las velocidades.

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

La cual no depende de las velocidades generalizadas  $\{\dot{q}_i\}$ .

Por tanto, tenemos que:

▪ **Caso A:**

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + (l_0 + \eta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\eta} & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m(l_0 + \eta)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

▪ **Caso B:**

$$T = \frac{1}{2}(A^2\omega^2 \sin^2 \omega t + l^2\dot{\varphi}^2 - 2A\omega l\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t)$$

donde podemos identificar:

$$T_2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$T_1 = -mA\omega l\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t$$

$$T_0 = \frac{1}{2}A^2\omega^2 \sin^2 \omega t$$

A partir de estas consideraciones definiremos los SISTEMAS NATURALES (TIPO 1) como aquellos cuya energía cinética se reduce a la forma cuadrática  $T_2$ .

Nótese que los sistemas esclerónomos van a cumplir que  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ , por lo que  $T_1 = T_0 = 0$ . Por tanto, todos los sistemas esclerónomos serán sistemas naturales (tipo 1).

## 2.5. Potencial generalizado

Como hemos visto, las ecuaciones de Lagrange se expresan como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = \tilde{Q}_j$$

en su forma más general. De los temas anteriores vimos que una fuerza puede expresarse a partir de un potencial si el campo era conservativo ( $F = -\nabla U$ ). Este tipo de potenciales se les denomina ordinarios. Por tanto, si  $U$  es conservativo podemos encontrar una función  $G$ , a la que llamaremos POTENCIAL GENERALIZADO, para las fuerzas generalizadas que cumpla que  $\vec{Q} = -\vec{\nabla}G$ . Utilizando estas expresiones podemos ver que se cumple que:

$$\tilde{Q}_j = -\frac{\partial G}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Si imponemos la condición de que  $G$  no depende de  $v$ , entonces:

$$G = \underbrace{G_0(q_j, t)}_{\text{Pot. ordinarios}} + \underbrace{\sum g_j \cdot \dot{q}_j}_{G_1}$$

donde  $g_j = g_i(q_j, t)$ .

Hay que darse cuenta de que el potencial es en general dependiente del tiempo y es, por tanto, no estacionario.

Podemos profundizar ahora con mayor fuerza en el concepto del Lagrangiano y redefinirlo como:

$$\begin{aligned} L = T - G = T_2 + T_1 + T_0 - G_0 - G_1 &\quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{reagrupando}} \quad L = T_2 - (T_1 - G_1) + (T_0 - G_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{L = L_2 + L_1 + L_0} \end{aligned}$$

Definimos ahora como SISTEMAS NATURALES (TIPO 2) a aquellos que admitan la descomposición del Lagrangiano como  $L = L_2 + L_1 + L_0$ . Véase que la definición de sistemas naturales (tipo 1), no es más que un caso particular de ésta y que, por tanto, esta última definición es mucho más general.

**Ejemplo 2.27.** Demostremos que las fuerzas de inercia se reducen a una sola fuerza generalizada que proviene de un potencial generalizado  $G$ .

Recordemos que para un sistema en rotación las fuerzas de inercia se expresan como:

$$F_{\text{inercia}} = -m \left( \underbrace{\ddot{R}_0}_{\text{arrastre}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{centrífuga}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_0'}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{acimutal}} \right)$$

## 2 Fundamentos de la mecánica lagrangiana

De esta expresión podemos ver que la fuerza centrífuga la podemos desarrollar de la siguiente forma:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{\omega}^2 \vec{r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left\{ (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 - \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}^2 \right\}}_{-(\vec{\omega} \times \vec{r})^2} \cdot \vec{e}_r = -\frac{1}{2} \vec{\nabla}_r (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

Sustituyendo en la fuerza de inercia:

$$F_{inercia} = \frac{1}{2} m \cdot \vec{\nabla} \underbrace{\left\{ 2\ddot{R}_0 \cdot r - (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\}}_{G_0} - m \underbrace{\left( 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \right)}_{= \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}$$

Identificando términos:  $-m \left( \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \right) = \frac{-\partial G}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Entonces:

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{r}} = m (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \overset{\int d\vec{r}}{\Rightarrow} G = m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r} + f(\dot{\vec{r}}, t) = G(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{\vec{r}}} = m (\vec{\omega} \times \vec{r}) \overset{\int d\dot{\vec{r}}}{\Rightarrow} G = \underbrace{-m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}}_{\text{prod. mixto antisim.}} + f(\vec{r}, t) = G(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Comparando estas expresiones vemos que:

$$G_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Recapitulando, las fuerzas de inercia provienen de un potencial generalizado y cumplen que:

$$F_{inercia} = -\frac{1}{2} m \cdot \vec{\nabla} \left\{ 2\ddot{R}_0 \cdot r - (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\} - \frac{\partial G}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\vec{\nabla} G$$

$$Q_r = -\vec{\nabla}_r G_0 - \frac{\partial G_1}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \left\{ 2\ddot{R}_0 \cdot r - (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \right\}$$

$$G_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

## 2.6. Función de Rayleigh. Función de disipación.

Sea una fuerza disipativa que dependa de la velocidad de las partículas

$$f_{v,i} = - \left( k_x \dot{x} \cdot \vec{i} + k_y \dot{y} \cdot \vec{j} + k_z \dot{z} \cdot \vec{k} \right)$$

que puede tratarse por ejemplo de una fuerza de rozamiento del tipo Stokes. Recordemos que habíamos deducido la forma más general para las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = \tilde{Q}_j$$

donde  $\tilde{Q}_j$  son las fuerzas que no derivan de un potencial ordinario.

Podemos entonces definir una función que sigue la expresión:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_x \dot{x} + k_y \dot{y} + k_z \dot{z})$$

llamada FUNCIÓN DE DISIPACIÓN DE RAYLEIGH.

Tal que la fuerza disipativa podemos obtenerla como:

$$f = -\vec{\nabla} F = - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \vec{k} \right)$$

Hay que darse cuenta de que esta expresión no implica que la fuerza disipativa derive de un potencial. Sería un error considerarla así, ya que hemos dicho desde un principio que las fuerzas disipativas son no conservativas.

Podemos usar ahora estas expresiones para deducir una relación para las fuerzas generalizadas en relación a la función de disipación de Rayleigh:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N f_{v,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_{F_{v,i}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_{F_{v,i}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}$$

Por lo que las ecuaciones de Lagrange a partir de la función de Rayleigh quedan como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}$$

De modo que para obtener las ecuaciones del movimiento debemos especificar dos funciones escalares: el lagangiano y la función de disipación.

## 2.7. Ecuación de la energía

De los resultados expuestos en todo el tema sabemos que en un contexto general tenemos que el lagrangiano del sistema es:

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) = T - G = T_2 + T_1 + T_0 - G_1 - G_0$$

Y la función de disipación de Rayleigh:

$$F(\dot{q}_j)$$

Por la regla de la cadena tenemos que al derivar el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^g \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^g \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{j=1}^g \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \\ &= \sum_{j=1}^g \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right] \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

Donde:

- (1) Teorema de Euler para funciones homogéneas de grado  $n$   $\sum_{j=1}^g \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot x_j = n \cdot f$ .
- (2)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \dot{q}_j$
- (3)  $\sum_{j=1}^g \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j = \sum_{j=1}^g \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right] \dot{q}_j = 2F$

Y por tanto, haciendo uso del teorema de Euler, sustituyendo y despejando:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j - L \right] = -2F - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Así que la ecuación de la energía es:

$$\frac{d}{dt} h = -2F - \frac{\partial L}{\partial t}$$

En donde hemos definido la FUNCIÓN DE LA ENERGÍA como:

$$\sum_{j=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j - L = h(\dot{q}_j, q_j, t)$$

Si examinamos la expresión de la ecuación de la Energía podemos ver que:

- $\frac{d}{dt}h = \text{potencia}$
- $2F \equiv \text{potencia} = \text{ritmo al que se disipa energía}$

Por tanto la ecuación de la energía nos indica el ritmo al que el sistema cambia su energía. Un sistema cuya ecuación de la energía cambie con el tiempo ( $\frac{d}{dt}h \neq 0$ ) será un sistema que pierde energía o al que se le suministra energía, según el signo.

Aunque en la naturaleza todos los sistemas sean disipativos ( $2F > 0$ ), nos interesarán sobre todo aquellos casos ideales en los que el segundo miembro de la ecuación de la energía es nulo, es decir, aquellos en los que la energía mecánica del sistema se mantenga constante.

Como veremos más adelante esto ocurrirá si el lagrangiano del sistema no depende explícitamente del tiempo, ya que entonces:  $-\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = \frac{d}{dt}h$ , y por tanto la función de la energía es una constante que recibe el nombre de INTEGRAL DE JACOBI. Más adelante analizaremos esta expresión con más detalle, pero adelantaremos que si la integral de Jacobi se mantenga constante nos estará indicando ciertas simetrías o cantidades conservadas en el sistema ( $h$  será una constante del movimiento). Para profundizar en estos temas véase la tercera edición de [10].

## 2.8. Resumen y formulario

- **Tipos de ligaduras:**
  - Ligaduras estructurales o de construcción del sistema
  - Ligaduras por activación
- **Clasificación de las ligaduras:**
  - Unilaterales  $f\{\dot{r}_i, r_i, t\} \geq 0$
  - Bilaterales:
    - Cinemáticas:  $f\{\dot{r}_i, r_i, t\} = 0$
    - Geométricas:  $f\{r_i, t\} = 0$
    - Estacionarias:  $f\{r_i\} = 0$
- **Clasificación de los sistemas mecánicos atendiendo al tipo de ligadura:**
  - Sistemas holónomos: Un sistema se dice holónimo cuando todas sus ligaduras son geométricas o cinemáticas integrables. A su vez, existen dos tipos de sistemas holónomos:
    - Sistemas holónomos esclerónomos: Aquellos en las que todas sus ligaduras son estacionarias (ligaduras independientes del tiempo).
    - Sistemas holónomos reónomos: En los que alguna de sus ligaduras depende explícitamente del tiempo.
  - Sistemas no holónomos: Un sistema es no holónimo cuando alguna de sus ligaduras es cinemática no integrable.
- **Grados de libertad de un sistema:**  $g = 3N - k$
- **Principio de los Trabajos Virtuales:**  $\sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_i$
- **Principio de D'Alambert:**  $\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$
- **Ecuaciones de Lagrange:**
  - $L = T - U$  Lagrangiano del sistema
  - $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = 0$  Ecuaciones de Lagrange
  - $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = \tilde{Q}_j$  Expresión general de Lagrange (para fuerzas no conservativas  $\tilde{Q}_j$ )
- **Sistemas naturales:**
  - Definiremos los sistemas naturales (tipo 1) como aquellos cuya energía potencial se reduce a la forma cuadrática  $T_2$ .
  - Definimos los sistemas naturales (tipo 2) como aquellos que admiten la descomposición del Lagrangiano como  $L = L_2 + L_1 + L_0$ .
- **Potencial Generalizado:**  $Q_r = -\vec{\nabla}_r G_0 - \frac{\partial G_1}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_j} \right)$



- **Función de Disipación de Rayleigh:**  $F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_x \dot{x} + k_y \dot{y} + k_z \dot{z})$
- **Ecuación de la Energía e Integral de Jacobi:**
  - $\frac{d}{dt} h = -2F - \frac{\partial L}{\partial t}$  Ecuación de la energía
  - $h = \sum_{j=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j - L = h(\dot{q}_j, q_j, t)$  Integral de Jacobi



## 3 Leyes de conservación

### 3.1. Introducción

Hasta ahora hemos descrito cómo calcular las ecuaciones de movimiento de un sistema, pero no hemos dicho nada sobre el modo de calcular su solución. Si un sistema tiene  $n$  grados de libertad estará descrito por  $n$  ecuaciones de movimiento de segundo orden en el tiempo, necesiándose para resolverlo  $2n$  constantes de integración. Desafortunadamente estas ecuaciones no podrán resolverse siempre, pero se puede extraer de ellas mucha información acerca del sistema, como veremos más adelante.

### 3.2. Coordenadas cíclicas e integrales primeras

El MOMENTO CANÓNICO CONJUGADO <sup>1</sup> o CANTIDAD DE MOVIMIENTO CANÓNICA  $p_j$  asociado a la coordenada  $q_j$  se define como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (3.1)$$

Como puede deducirse de las ecuaciones de Lagrange, *el momento canónico se conserva* si la *variable*  $q_j$  *es cíclica*, es decir, si no aparece explícitamente en el lagrangiano del sistema.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j &= C. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Este hecho es fundamental, pues si la coordenada canónica  $q_j$  es cíclica se puede despejar la velocidad canónica conjugada  $\dot{q}_j$  de las ecuaciones de movimiento, a la que se denomina integral primera.

---

<sup>1</sup>Hay que indicar que dicho momento no siempre coincide con la cantidad de movimiento. Así, si la variable generalizada  $q_j$  es un ángulo puede comprobarse que las dimensiones de  $p_j$  no son de cantidad de movimiento (masa por velocidad), sino de momento angular.

### 3.3. La integral de Jacobi

Si se calcula la derivada total del lagrangiano se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

En el primer sumatorio, de acuerdo con las ecuaciones de Lagrange, se puede realizar la sustitución:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.4)$$

Entonces, la ecuación (3.3) se puede poner de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Pasando el término de la izquierda de (3.5) a la derecha resulta

$$\sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

Al término entre paréntesis se le denomina INTEGRAL DE JACOBI  $h$  y está definida por (3.7), como se estudió en el capítulo anterior

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L. \quad (3.7)$$

Como puede verse, dicha integral se conserva si el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano. En algunas circunstancias, la integral de Jacobi coincide con la energía total del sistema.

En general, es posible descomponer la energía cinética  $T$  en tres términos, tales que el primero de ellos dependa sólo de las coordenadas generalizadas ( $T_0$ ), el segundo dependa no sólo de las coordenadas generalizadas sino también linealmente de las velocidades generalizadas ( $T_1$ ) y el tercero sea una función de las coordenadas generalizadas y que dependa cuadráticamente de las velocidades generalizadas ( $T_2$ ).

$$T = T_0(q) + T_1(q, \dot{q}) + T_2(q, \dot{q}) \quad (3.8)$$

De esta forma, el lagrangiano se puede descomponer según su comportamiento funcional respecto a las variables  $\dot{q}$

$$L = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t) \quad (3.9)$$

Aquí,  $L_2$  es una función homogénea de segundo grado (no meramente cuadrática) mientras que  $L_1$  es homogénea de primer grado en  $\dot{q}$ . Si se sustituye este lagrangiano en la expresión de la integral de Jacobi teniendo en cuenta el Teorema de Euler <sup>2</sup> se obtiene (3.10).

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0. \quad (3.10)$$

Si las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo  $T = T_2$ . Si el potencial no depende de las velocidades generalizadas,  $L_2 = T$  y  $L_0 = -V$ , con lo que

$$h = T + V = E, \quad (3.11)$$

de manera que la integral de Jacobi coincide con la energía total del sistema.

Veámoslo con algunos ejercicios:

**Ejercicio 3.1.** Una partícula de masa  $m$  se mueve en el espacio sometida a la acción de una fuerza central que deriva del potencial  $U(r)$ . Obtén el lagrangiano del sistema en coordenadas cartesianas y esféricas. Determina, en cada caso, las coordenadas cíclicas que aparecen y calcula las integrales primeras asociadas a las mismas.

#### Coordenadas cartesianas

Para escribir el lagrangiano es necesario escribir previamente la energía cinética  $T$  y el potencial  $U$  en función de las coordenadas elegidas, en este caso cartesianas. Así, la energía cinética de la partícula es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (3.12)$$

y el potencial bajo la acción de una fuerza central

$$U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad (3.13)$$

por lo que el lagrangiano es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (3.14)$$

En este caso, las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  no son cíclicas, pues aparecen en el lagrangiano, por lo que (i) los momentos canónicos conjugados no se conservan en este sistema de coordenadas y (ii) no hay integrales primeras.

<sup>2</sup>El Teorema de Euler dice que una función  $f$  homogénea de grado  $n$  en  $x$  cumple que  $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$

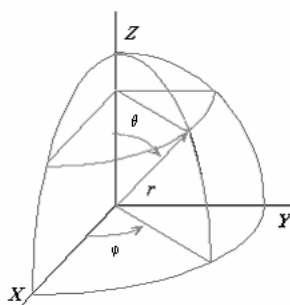


Figura 3.1: Coordenadas esféricas

Además, dado que el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano la integral de Jacobi se conserva

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \text{const.} \quad (3.15)$$

Dicha integral coincide además con la energía mecánica del sistema, pues las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo

$$h = \text{const} = E. \quad (3.16)$$

#### Coordenadas esféricas

La energía cinética se puede escribir en función de las coordenadas esféricas sin más que escribir las coordenadas cartesianas que aparecen en (3.12) en función de las coordenadas esféricas

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (3.17)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (3.18)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (3.19)$$

En este sistema de coordenadas, la energía cinética de la partícula es

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (3.20)$$

Por otra parte, la energía potencial toma una forma mucho más simple, dado que sólo depende de la distancia al origen  $r$

$$U = U(r), \quad (3.21)$$

con lo que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r). \quad (3.22)$$

En este caso, sí que hay una coordenada cíclica: el ángulo acimutal  $\varphi$ , de manera que su momento canónico conjugado  $p_\varphi$  será constante.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3.23)$$

Si se llama  $A$  al valor inicial del momento canónico conjugado,

$$A = mr_0^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0, \quad (3.24)$$

La velocidad  $\dot{\varphi}$  puede escribirse en función de la distancia al origen  $r$  y del ángulo polar  $\theta$  (integral primera)

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{mr^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.25)$$

Como puede observarse, mientras con las ecuaciones de Lagrange se obtienen ecuaciones diferenciales de segundo orden, la integral primera da el valor de la coordenada  $\varphi$  integrando una sola vez, analítica o numéricamente.

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t dt' \frac{A}{mr^2(t') \sin^2 \theta(t')} \quad (3.26)$$

Donde  $\varphi_0$  es el valor inicial de la coordenada  $\varphi$ .

En este ejemplo se puede comprobar la importancia de la selección de un adecuado sistema de coordenadas.

**Ejercicio 3.2.** Dos partículas se mueven en una dimensión sometidas a una fuerza que deriva del potencial  $U(x_1, x_2) = q(x_1 - x_2)^n$ . Demuestra que la suma de los momentos canónicos conjugados se conserva. Interpreta físicamente el resultado.

Para escribir el lagrangiano es necesario hallar primeramente la energía cinética como la suma de la energía cinética de cada una de las dos partículas

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad (3.27)$$

obteniendo así

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - q(x_1 - x_2)^n. \quad (3.28)$$

En este caso no hay ninguna coordenada cíclica.

Escribamos ahora la ecuación de movimiento de la primera partícula

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -qn(x_1 - x_2)^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 - qn(x_1 - x_2)^{n-1} = 0. \quad (3.29)$$

### 3 Leyes de conservación

Haciendo lo mismo para la segunda se obtiene

$$m_2 \ddot{x}_2 - qn(x_1 - x_2)^{n-1} = 0 \quad (3.30)$$

La suma de ambas ecuaciones coincide con la derivada de la suma de los momentos canónicos conjugados

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) = 0, \quad (3.31)$$

por lo que dicha suma se conserva

$$p_1 + p_2 = \text{const.} \quad (3.32)$$

Dado que el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano la integral de Jacobi también se conserva

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + q(x_1 - x_2)^n = \text{const.} \quad (3.33)$$

Además, como el tiempo tampoco aparece en las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas dicha integral coincide con la energía mecánica del sistema

$$h = \text{const} = E. \quad (3.34)$$

**Ejercicio 3.3.** Una partícula de masa  $m$  se mueve sin rozamiento sobre la superficie interior de un paraboloides de revolución de ecuación  $x^2 + y^2 = 4z$  sometida a la acción de la gravedad. Determina el número de constantes del movimiento y las correspondientes integrales primeras.

Dada la simetría de la superficie que restringe el movimiento (ligadura), parece razonable hacer el cambio a coordenadas cilíndricas, dado por

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (3.35)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad (3.36)$$

$$z = z. \quad (3.37)$$

Como coordenadas generalizadas se elegirán  $\rho$  y  $\varphi$ . La coordenada  $z$  se puede poner en función de las otras dos a partir de la ecuación de ligadura

$$\rho^2 = 4z \Rightarrow z = \frac{1}{4} \rho^2. \quad (3.38)$$

Las energías cinética y potencial y el lagrangiano son en este caso (3.39) y (3.40).

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \rho^2 \dot{\rho}^2 \right), \quad (3.39)$$

$$U = mgz = \frac{mg}{4} \rho^2, \quad (3.40)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \rho^2 \dot{\rho}^2 \right) - \frac{mg}{4} \rho^2. \quad (3.41)$$



Como puede observarse, ángulo acimutal  $\varphi$  es una coordenada cíclica, por lo que su momento canónico conjugado  $p_\varphi$  será igual a una constante  $A$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = A = m\rho_0^2\dot{\varphi}_0. \quad (3.42)$$

La correspondiente integral primera es

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{m\rho_0^2(t)}, \quad (3.43)$$

y el ángulo acimutal

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{A}{m} \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2(t')}. \quad (3.44)$$

Dado que el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano ni en las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas la integral de Jacobi se conserva y coincide con la energía mecánica del sistema

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\rho^2\dot{\rho}^2 \right) + \frac{mg}{4}\rho^2 = E = \text{const} \quad (3.45)$$

**Ejercicio 3.4.** Una partícula de masa  $m$  se mueve por la superficie de una esfera centrada en el origen de radio  $R$  sometida al potencial

$$U(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + R^2} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \quad (3.46)$$

Determina el número de constantes de movimiento y las correspondientes integrales primeras.

Puesto que la ligadura es una superficie esférica se realiza el cambio a dichas coordenadas aplicando las expresiones (3.17), (3.18) y (3.19) eligiendo los ángulos polar y acimutal como coordenadas generalizadas (la distancia al origen  $r$  permanece constante e igual a  $R$  en todo momento). Así, el potencial que actúa sobre la partícula toma la forma

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{R^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + R^2} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{R^2 - r^2 \sin^2 \theta}{R^2 + r^2 \sin^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta} - 1 \\ &= -2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Hay que resaltar que los dos últimos términos de este potencial se simplifican considerablemente en este sistema de coordenadas (en el sistema cartesiano tenían un cociente

### 3 Leyes de conservación

$y/x$  y  $x/y$ ).

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (3.48)$$

y el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + 2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}. \quad (3.49)$$

De nuevo, el ángulo acimutal  $\varphi$  es una coordenada cíclica, por lo que su momento canónico conjugado  $p_\varphi$  se conserva

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const} = mR^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0 = A. \quad (3.50)$$

La correspondiente integral primera es

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{mR^2 \sin^2 \theta(t)}, \quad (3.51)$$

y el ángulo acimutal

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{A}{mR^2} \int_0^t \frac{dt'}{\sin^2 \theta(t')}. \quad (3.52)$$

Dado que el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano ni en las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas, la integral de Jacobi se conserva y coincide con la energía mecánica del sistema:

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - 2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta} = \text{const} = E \quad (3.53)$$

**Ejercicio 3.5.** Una partícula de masa  $m$  se mueve por la superficie de una esfera centrada en el origen de radio  $R$  sometida al potencial

$$U(x, y, z) = -\frac{\alpha}{2}mR^2 \frac{z^2}{x^2 + y^2},$$

donde  $\alpha = 1s^{-2}$ .

Determina el número de constantes de movimiento y las correspondientes integrales primeras, sabiendo que las condiciones iniciales de su movimiento son

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \pi/2, & \dot{\theta}(0) &= -1\text{rad/s}, \\ \varphi(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 1\text{rad/s}. \end{aligned}$$

De nuevo, el cambio más adecuado es a coordenadas esféricas, seleccionando de nuevo los ángulos polar y acimutal como coordenadas generalizadas

$$U = -\frac{\alpha}{2}mR^2 \cot^2 \theta, \quad (3.54)$$

El lagrangiano es entonces

$$L = \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{\alpha}{2}mR^2 \cot^2 \theta. \quad (3.55)$$

El ángulo acimutal  $\varphi$  es una coordenada cíclica, por lo que se conserva su momento canónico conjugado, el cual se puede calcular a partir de las condiciones iniciales dadas por el enunciado

$$p_\varphi = p_\varphi(0) = mR^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0 = mR^2, \quad (3.56)$$

y la correspondiente integral primera es

$$\dot{\varphi} = \frac{mR^2}{mR^2 \sin^2 \theta(t)} = \frac{1}{\sin^2 \theta(t)}, \quad (3.57)$$

de manera que el ángulo acimutal es en este caso

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{dt'}{\sin^2 \theta(t')}. \quad (3.58)$$

Una vez más, el tiempo no aparece explícitamente en el lagrangiano ni en las ecuaciones de transformación de las coordenadas generalizadas la integral de Jacobi se conserva y coincide con la energía mecánica del sistema

$$h(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{\alpha}{2}mR^2 \cot^2 \theta = \text{const} = E \quad (3.59)$$

### 3.4. El péndulo simple

Como se dijo en el tema anterior, el péndulo simple sólo se puede considerar isócrono cuando describe pequeños ángulos de oscilación. Pero, ¿qué ocurre cuando describe ángulos grandes? Resulta sorprendente que algo tan sencillo como una masa y una cuerda no tenga una ecuación explícita. Parece que el péndulo *simple* no es tal cosa. Planteemos de nuevo las ecuaciones de Lagrange para intentar extraer de ellas más información a través de las integrales primeras.

Tal y como se hizo en el tema anterior, se elige el ángulo de oscilación  $\theta$  como coordenada generalizada. Las energías cinética y potencial (esta última medida con respecto al punto más bajo de oscilación) son, en función del mismo

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2, \quad (3.60)$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta), \quad (3.61)$$

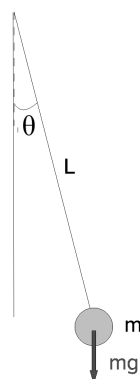


Figura 3.2: El péndulo simple

de manera que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta). \quad (3.62)$$

La ecuación del movimiento es por consiguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta \end{aligned} \right\} \\ ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0, \quad (3.63)$$

que es la ya conocida ecuación del péndulo.

Dado que el tiempo no aparece en el lagrangiano ni en las ecuaciones de transformación de coordenadas, la integral de Jacobi se conserva y coincide con la energía del sistema

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta). \quad (3.64)$$

Supongamos que el péndulo se suelta desde una altura  $h$  respecto al nivel de referencia partiendo del reposo en el instante inicial. En esta situación, la energía mecánica del sistema es toda ella potencial

$$E = mgl(1 - \cos \theta_0), \quad (3.65)$$

donde  $\theta_0$  es el ángulo inicial de oscilación

$$\theta_0 = \arccos \left( 1 - \frac{h}{l} \right). \quad (3.66)$$

A primera vista, no se puede ir más allá en el estudio del péndulo simple, pues la coordenada  $\theta$  no es cíclica, por lo que el momento canónico no se conserva. No obstante, se puede saber un poco más teniendo en cuenta que la energía mecánica es constante de forma análoga a como se hizo en los ejemplos anteriores. La velocidad angular se puede calcular igualando la energía inicial con la energía en un instante  $t$  arbitrario

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0), \quad (3.67)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)}. \quad (3.68)$$

Si se separan las partes temporal y angular de la expresión anterior resulta

$$t = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\frac{2g}{l}(\cos \theta' - \cos \theta_0)}. \quad (3.69)$$

Los cosenos del denominador se pueden poner en función del ángulo mitad:

$$\cos \theta' = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\theta'}{2} \right), \quad (3.70)$$

y se define  $\sin \varphi$  como se indica debajo.

La expresión (3.69) se convierte en una integral elíptica de primera especie

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (3.71)$$

donde

$$\sin \varphi = \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta'}{2} \right) = k \sin \left( \frac{\theta'}{2} \right), \quad (3.72)$$

con  $k = \sin(\theta_0/2)$ .

De nuevo, la pregunta es si dicha integral tiene solución.

Supongamos por último que el péndulo describe oscilaciones pequeñas. En ese caso, el seno de teta se puede aproximar por dicho ángulo, con lo que la ecuación (3.63) se convierte en la ecuación del movimiento armónico simple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (3.73)$$

de  $\omega = \sqrt{g/l}$  y periodo  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

### 3 Leyes de conservación

El ángulo y la velocidad angular (suponiendo que se parte del reposo) son

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad (3.74)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega \sin(\omega t) \quad (3.75)$$

El lagrangiano del péndulo (3.62) puede escribirse en función explícita del tiempo introduciendo las expresiones (3.74) y (3.75) en (3.62), y aproximando  $1 - \cos \theta$  por  $\theta^2/2$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\theta_0^2\omega^2 \sin^2(\omega t) - mgl\frac{1}{2}\theta_0^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}mgl\theta_0^2 (\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)) \\ &= -\frac{1}{2}mgl\theta_0^2 \cos^2(2\omega t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

### 3.5. La integral de acción y el Principio de Hamilton

El estado de un sistema viene dado por el ESPACIO DE CONFIGURACIÓN  $\zeta$  del mismo, que es por tanto el lugar geométrico de los puntos que describen su evolución dinámica. Por simplicidad, supongamos que nuestro sistema viene caracterizado por dos coordenadas generalizadas  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ , que definen el espacio de configuración de la figura 3.3. Supóngase además que el sistema se encuentra inicialmente en el punto  $A$  y que evoluciona hasta el punto  $B$ . En la figura 3.3 se han representado tres de las posibles trayectorias que podría seguir el sistema. Pero, ¿cuál de ellas es la que realmente sigue el sistema? ¿Qué condiciones debe cumplir? ¿Es única?

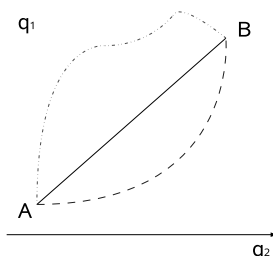


Figura 3.3: Espacio de configuración

Para contestar a las preguntas anteriores se define la INTEGRAL DE ACCIÓN de un

sistema como el funcional  $S$

$$S : \zeta \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$\{q_1(t), q_2(t)\} \longrightarrow \int_{t_A}^{t_B} L(q_1(t), q_2(t), t) \quad (3.77)$$

De todas las trayectorias posibles, el sistema evoluciona de tal manera que a lo largo de ellas la integral de acción presenta un punto crítico

$$\delta S = 0 \Rightarrow \text{Trayectoria} \quad (3.78)$$

A la expresión (3.78) se le conoce como el *Principio de Hamilton*<sup>3</sup>, que implica el cumplimiento de las ecuaciones de Lagrange

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (3.79)$$

### 3.6. Las simetrías de la integral de acción: el teorema de Noether

Una de las propiedades más potentes de la integral de acción son sus simetrías. Como se sabe, un elemento es simétrico cuando es invariante bajo cierta transformación. Así, un cubo o una esfera presentan simetría geométrica mientras las funciones pares tiene simetría respecto al eje de ordenadas. En el caso de la integral de acción  $S$ , las simetrías vienen dadas por el TEOREMA DE NOETHER<sup>4</sup>, que dice:

<sup>3</sup>Hamilton, William Rowan (1805-1865), matemático y astrónomo irlandés, conocido sobre todo por sus trabajos en análisis de vectores y en óptica. Nació en Dublín y estudió en el Trinity College. En 1827, sin haber obtenido su título, fue nombrado profesor de astronomía, y al año siguiente astrónomo real para Irlanda. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en el Trinity College y en el observatorio de Dunsink, cerca de Dublín. En el campo de la dinámica, introdujo las funciones de Hamilton, que expresan la suma de las energías cinética y potencial de un sistema dinámico; son muy importantes en el desarrollo de la dinámica moderna y para el estudio de la teoría cuántica. Describió una forma matemática de manejar pares de números reales. Esas reglas se usan en la actualidad para operar con números complejos. Más adelante descubrió la clave para operar con ternas o  $n$ -uplas de números, en el caso de  $n^2$ , que consistía en descartar la propiedad conmutativa de la multiplicación usual. A los nuevos objetos que creó les llamó *cuaterniones*, precursores de lo que ahora son los vectores. Su monumental obra acerca de este tema, *Treatise on Quaternions*, fue publicada en 1853.

<sup>4</sup>Emmy Noether (1882-1935), considerada como la creadora del álgebra moderna, fue una matemática alemana de origen judío. Estudió con un permiso especial que no le daba derecho a examinarse en la Universidad de Erlangen cuando la admisión a las mujeres aún estaba prohibida en dicha institución, siendo la única alumna entre los cerca de mil estudiantes.

En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y Felix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en la universidad de Göttingen, que en aquella época era el principal centro matemático de Alemania y probablemente de Europa. Durante este periodo la vida estuvo marcada por una intensa producción científica que determinó su aportación a las matemáticas y a la física; en este tiempo colaboró asimismo en la edición de la prestigiosa revista *Mathematische Annalen*.

### 3 Leyes de conservación

Si  $S$  es invariante ante la transformación

$$q'_j = q_j + \varepsilon \psi_j(q_j, t) \quad (3.80)$$

$$\dot{q}'_j = \dot{q}_j + \varepsilon \dot{\psi}_j(q_j, t) \quad (3.81)$$

$$t' = t + \varepsilon \phi(q_j, t) \quad (3.82)$$

entonces  $J = h\phi - \sum_j p_j \psi_j$  es constante del movimiento.

Este teorema se ilustra para el caso en que la coordenada  $q_j$  sea cíclica y cuando el tiempo no aparezca explícitamente en el lagrangiano.

En el primer caso, es obvio que

$$L(q_j + \varepsilon) = L(q_j) \quad (3.83)$$

Verificándose entonces que la integral de acción es efectivamente un invariante

$$S' = \int_{t_A}^{t_B} L' dt' = \int_{t_A}^{t_B} L dt = S \quad (3.84)$$

Pues la coordenada  $q_j$  no aparece en el lagrangiano, de manera que la coordenada  $q'_j$  se puede poner de la forma

$$q'_j = q_j + \varepsilon \Rightarrow \psi_j = 1 \quad (3.85)$$

Siendo  $\psi_k = 0$  para  $k \neq j$  y  $\phi = 0$ .

De manera que la constante de Noether es:

$$J = h0 - \sum_j p_j \phi_j \quad (3.86)$$

$$= h0 - (0 + 0 + \dots + 0 + p_j 1 + 0 + \dots + 0) = -p_j \quad (3.87)$$

Si por el contrario es el tiempo el que no aparece en el lagrangiano se cumple que

$$L(t + \varepsilon) = L(t) \quad (3.88)$$

Es obvio que la integral de acción es invariante

$$S' = \int_{t_A}^{t_B} L' dt' = \int_{t_A}^{t_B} L dt = S \quad (3.89)$$

Por lo que el tiempo  $t'$  se puede poner en la forma

$$t' = t + \varepsilon \Rightarrow \phi = 1 \quad (3.90)$$

Siendo  $\psi_j = 0$  para todo  $j$ , y  $J = h$ , de modo que la constante asociada al teorema de Noether se reduce a la integral de Jacobi.

A continuación se exponen algunos ejemplos de aplicación.

---

Emmy consiguió demostrar dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía y realizó estudios fundamentales en axiomatización y el desarrollo de la teoría algebraica de anillos, módulos, ideales, grupos con operadores, etc.



**Ejercicio 3.6.** El lagrangiano de un sistema resulta invariante ante un desplazamiento helicoidal definido mediante la transformación

$$z' = z + \varepsilon \frac{b}{2\pi} \quad (3.91)$$

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon \quad (3.92)$$

$$\rho' = \rho + \varepsilon \quad (3.93)$$

$$t' = t \quad (3.94)$$

determina la constante de movimiento asociada a dicha simetría.

Dado que la integral de acción  $S$  es invariante, busquemos el valor de  $\psi$  y  $\phi$

$$\psi_z = \frac{b}{2\pi} \quad (3.95)$$

$$\psi_\varphi = \psi_\rho = 1 \quad (3.96)$$

$$\phi = 0 \quad (3.97)$$

La constante de Noether se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} J &= h\phi - \sum_{j=z,\varphi,\rho} p_j \psi_j \\ &= h0 - \left( p_z \frac{b}{2\pi} + p_\varphi 1 + p_\rho 1 \right) = -p_z \frac{b}{2\pi} + p_\varphi + p_\rho \end{aligned} \quad (3.98)$$

Luego la magnitud conservada es

$$-p_z \frac{b}{2\pi} + p_\varphi + p_\rho = \text{const} \quad (3.99)$$

**Ejercicio 3.7.** La integral de acción de un sistema con simetría esférica resulta invariante ante un desplazamiento  $e$  a lo largo de la dirección radial. Determina cuál es la magnitud conservada. ¿Y si se conserva con respecto a un giro adicional  $\varepsilon$  del ángulo polar, siendo  $\varepsilon$  una constante de valor arbitrario?

En el primer caso, la transformación de las coordenadas es

$$\rho' = \rho + \varepsilon \quad (3.100)$$

$$\phi' = \phi \quad (3.101)$$

$$\theta' = \theta \quad (3.102)$$

$$t' = t \quad (3.103)$$

con lo que los coeficientes de la misma son

$$\psi_\rho = 1 \quad (3.104)$$

$$\psi_\varphi = 0 \quad (3.105)$$

$$\psi_\theta = 0 \quad (3.106)$$

$$\phi = 0 \quad (3.107)$$

### 3 Leyes de conservación

Por lo que la magnitud conservada es

$$J = h\phi - \sum_{j=\rho,\varphi,\theta} p_j\psi_j = h0 - (p_\rho 1 + p_\varphi 0 + p_\theta 0) = -p_\rho \quad (3.108)$$

$$-p_\rho = cte \quad (3.109)$$

En el segundo caso, la transformación de las coordenadas es de la forma:

$$\rho' = \rho \quad (3.110)$$

$$\phi' = \phi \quad (3.111)$$

$$\theta' = \theta + \varepsilon \quad (3.112)$$

$$t' = t \quad (3.113)$$

Con lo que

$$\psi_\rho = 0 \quad (3.114)$$

$$\psi_\varphi = 0 \quad (3.115)$$

$$\psi_\theta = k \quad (3.116)$$

$$\phi = 0 \quad (3.117)$$

Por lo que la magnitud conservada es

$$J = h\phi - \sum_{j=\rho,\varphi,\theta} p_j\psi_j = h0 - (p_\rho 0 + p_\varphi 0 + p_\theta k) = -p_\theta \quad (3.118)$$

$$-p_\theta = cte \quad (3.119)$$

**Ejercicio 3.8.** Una masa de masa  $m$  se mueve sometida a un potencial que verifica la relación  $U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^n U(r)$ , donde  $\lambda$  es un número real y  $n$  un entero. Determina el valor de  $n$  para el cual la acción es invariante ante la transformación:

$$\mathbf{r}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{r} \quad (3.120)$$

$$t' = (1 + \varepsilon)^2 t \quad (3.121)$$

Obtén asimismo la correspondiente constante del movimiento.

Escribamos ahora los lagrangianos y las acciones en la situación inicial  $(\mathbf{r}, t)$  y después de hacer la transformación  $(\mathbf{r}', t')$  e intentemos relacionarlos:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}) \quad S = \int_{t_A}^{t_B} L dt \quad (3.122)$$

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}'^2 - U(\mathbf{r}') \quad S' = \int_{t_A}^{t_B} L' dt' \quad (3.123)$$

Intentemos ahora poner  $L'$  como una función de  $\mathbf{r}$  y  $t$  a través de las transformaciones del enunciado y de la relación que cumple el potencial

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \dot{\mathbf{r}} \\ U' &= U(\mathbf{r}') = U((1+\varepsilon)\mathbf{r}) = (1+\varepsilon)^n U(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\}$$

$$L' = \frac{1}{2} m (1+\varepsilon)^{-2} \dot{\mathbf{r}}'^2 - (1+\varepsilon)^n U(\mathbf{r}). \quad (3.124)$$

El teorema de Noether se puede aplicar si  $S = S'$

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}) \right] dt, \quad (3.125)$$

$$S' = \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}'^2 - (1+\varepsilon)^{n+2} U(\mathbf{r}) \right] dt, \quad (3.126)$$

lo cual sucede si y sólo si  $n = -2$ .

Los parámetros de la transformación realizada son

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{r} \Rightarrow \psi_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r}, \quad (3.127)$$

$$t' = (1+\varepsilon)^2 t = t + \varepsilon(2+\varepsilon)t \Rightarrow \phi(\mathbf{r}, t) = (2+\varepsilon)t \simeq 2t, \quad (3.128)$$

pues  $\varepsilon \ll 1$ , y la cantidad conservada es

$$J = h\phi - \mathbf{p}\mathbf{r} = h2t - \mathbf{p}\mathbf{r}. \quad (3.129)$$

Al no existir ligaduras, el sistema es holónomo esclerónomo, por lo que la integral de Jacobi  $h$  coincide con la energía del sistema, con lo que la  $J$  anterior se puede escribir como

$$J = 2Et - \mathbf{p}\mathbf{r}, \quad (3.130)$$

que tiene unidades de acción (energía por tiempo).

### 3.7. El método de los multiplicadores de Lagrange

Como se ha visto anteriormente, la Mecánica Analítica permite describir la evolución de un sistema sin plantear las ecuaciones de Newton. Sin embargo, en muchos casos interesa también conocer el valor de las ligaduras del sistema (por ejemplo, la tensión de una biela para saber si se rompe por fatiga). El MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE permite hacer esto sin necesidad de plantear las tediosas Leyes de Newton. Para una exposición detallada del método de los multiplicadores de Lagrange, véase, por ejemplo [11].

El Principio de Hamilton establece que un sistema evoluciona maximizando la integral de acción (3.77)

$$\delta S = \sum_j \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0. \quad (3.131)$$

### 3 Leyes de conservación

En los sistemas holónomos, tenemos

$$\sum_j \nabla f \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (3.132)$$

mientras que en los no holónomos es

$$\sum_j a_{ij} \dot{q}_j + a_{i0} dt = 0. \quad (3.133)$$

Para algunos coeficientes, la expresión superior se simplifica

$$\sum_j a_{ij} \delta q_j = 0, \quad (3.134)$$

mientras que en otros casos, dicha expresión no vale cero. Para anularla hay que multiplicar por ciertos coeficientes  $\lambda_l$

$$\lambda_l(t) \sum_j a_{ij} \delta q_j = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (3.135)$$

Dado que vale cero no cambia el valor de la integral de acción si le añadimos la expresión

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} \sum_l \lambda_l(t) \sum_j a_{lj} \delta q_j &= \sum_j \int_{t_a}^{t_b} \left[ \sum_l \lambda_l(t) a_{lj} \right] \delta q_j = 0, \\ \sum_j \int_{t_a}^{t_b} \left[ \sum_l \lambda_l(t) a_{lj} \right] \delta q_j dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.136)$$

La variación de la integral de acción es

$$\delta S = \sum_j \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_l \lambda_l(t) a_{lj} \right] \delta q_j dt \quad (3.137)$$

Lo cual se puede escribir del siguiente modo

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_l \lambda_l(t) a_{lj}, \quad k = n - m + 1, \dots, n, \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_l \lambda_l(t) a_{lj}, \quad j = 1, \dots, n - m. \quad (3.139)$$

En general

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_l \lambda_l(t) a_{lj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, m \quad (3.140)$$

$$\sum_{l=1}^m \lambda_l(t) a_{lj} = Q_j \quad (3.141)$$

Una vez conocido el valor de los coeficientes  $\lambda_l(t)$ , las fuerzas generalizadas se calculan haciendo

$$Q_j = \sum_{l=1}^m \lambda_l(t) \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (3.142)$$

y las fuerzas newtonianas por medio de la expresión (3.143)

$$Q_j = \sum_{i=1} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (3.143)$$

donde el sumatorio en  $i$  se extiende sobre todas las partículas del sistema.

Nótese que cuando las coordenadas generalizadas coinciden con las cartesianas, las fuerzas generalizadas son las newtonianas.

**Ejercicio 3.9.** ¿Cuál es la fuerza de reacción normal en un plano inclinado  $\alpha$  grados por el que desciende un bloque de de masa  $m$  en coordenadas polares?

En coordenadas polares planas  $(r, \varphi)$  la condición de ligadura es (ver la figura 3.4):

$$f = \varphi - \alpha = 0. \quad (3.144)$$

En estas coordenadas, las energías cinética y potencial vienen dadas, respectivamente, por (3.145) y (3.146).

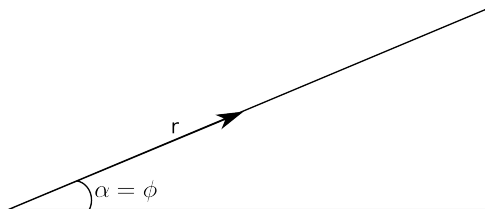
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \quad (3.145)$$

$$U = mgr \sin \varphi \quad (3.146)$$

Y el lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \sin \varphi \quad (3.147)$$

El multiplicador de Lagrange correspondiente a la coordenada  $r$  vale cero, pues no aparece en la condición de ligadura, siendo por ello también nula su fuerza generalizada asociada.



**Figura 3.4:** Esquema del problema

### 3 Leyes de conservación

La fuerza generalizada asociada a  $\varphi$  es

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2 \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mgr \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

$$mr^2 \ddot{\varphi} + 1mr\dot{\varphi} + mgr \cos \varphi = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lambda_2 1 = Q_\varphi \quad (3.149)$$

Teniendo en cuenta que el ángulo  $\alpha$  es constante, la fuerza generalizada  $\mathbf{Q}_\varphi$ , que coincide con la normal, es

$$N = mg \cos \varphi \quad (3.150)$$

**Ejercicio 3.10.** Calcular la tensión de la cuerda de longitud  $l$  de un péndulo simple de masa  $m$  en coordenadas polares.

Llamando  $r$  a la distancia al origen y  $\varphi$  al ángulo que forma la cuerda con la vertical, el lagrangiano y la condición de ligadura son:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi, \quad (3.151)$$

$$f = r - l = 0. \quad (3.152)$$

El hecho de que la condición de ligadura no contenga la coordenada generalizada  $\varphi$  hace que la fuerza generalizada valga cero en esta dirección.

El multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  es

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda_1 1 = Q_1. \quad (3.153)$$

La fuerza generalizada a lo largo de la cuerda coincide con su tensión

$$Q_1 = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi. \quad (3.154)$$

**Ejercicio 3.11.** Calcula las fuerzas de ligadura que actúan sobre una partícula de masa  $m$  que se mueve sin rozamiento por el interior de un cuenco semiesférico de radio  $R$ .

Trabajando en coordenadas esféricas -ver expresiones (3.17), (3.18) y (3.19)-, la ligadura es

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \Rightarrow r - R = 0, \quad (3.155)$$

y las energías cinética y potencial

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (3.156)$$

$$U = mgz = -mgr \cos \theta, \quad (3.157)$$

por lo que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \theta. \quad (3.158)$$

El primer coeficiente de lagrange es nulo, pues  $\theta$  no aparece en la ecuación de ligadura:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mr^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (3.159)$$

Que es una de las ecuaciones dinámicas de movimiento de la partícula.

Y el segundo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + mg \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$m\ddot{r} - mr \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - mg \cos \theta = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda_2 1 \Rightarrow \quad (3.160)$$

$$\lambda_2 1 = Q_2 = -mR \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - mg \cos \theta \quad (3.161)$$

La única fuerza existente es la fuerza radial  $F_r$ . Utilizando (3.143),

$$Q_2 = F_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = -mg \cos \theta - mr \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \quad (3.162)$$

### 3 Leyes de conservación



## 4 Potenciales centrales

### 4.1. Problema de los dos cuerpos

Definimos el CENTRO DE MASAS de un sistema de partículas como:

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Que en el caso de dos cuerpos se reduce a:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.1)$$

Definimos la MASA REDUCIDA de un sistema de dos cuerpos como:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Se puede demostrar que la energía cinética de un sistema de partículas es la correspondiente a su centro de masas más la suma de la correspondiente a cada partícula respecto del centro de masas (ver figura 4.1):

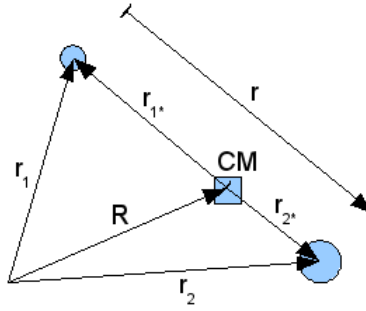
$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{R} + \dot{r}_{i*})^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{R}^2 + \underbrace{\sum m_i \dot{r}_{i*}}_{\dot{R}=0} \dot{R} + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_{i*}^2 = \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \dot{R}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_{i*}^2 \end{aligned}$$

por lo que en un sistema de dos partículas tenemos que:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{R}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{r}_{1*}^2}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{r}_{2*}^2}_{T_2} \quad (4.2)$$

Sistema	$m_2/m_1$	$\mu$
Átomo de hidrógeno (protón-electrón)	1.836	0.99946
Sol-Tierra	$3.33 \cdot 10^5$	0.999997
Tierra-Luna	81.3	0.9878
Sirio A – Sirio B	2.2	0.69
Deuterón (neutrón-protón)	1.0013	0.50032

**Cuadro 4.1:** Masas reducidas de algunos sistemas relevantes. [8]



**Figura 4.1:** esquema de la geometría del sistema

Podemos utilizar ahora resultados geométricos para conseguir expresar el lagrangiano del sistema en función de sólo dos vectores de posición:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{r}_{1*} = \vec{r}_1 \\ \vec{R} + \vec{r}_{2*} = \vec{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_{1*} + \vec{r}_{2*} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{R}$$

Sustituyendo  $\vec{R}$  por su expresión en (4.1):

$$\vec{r}_{1*} + \vec{r}_{2*} = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]$$

Utilizando ahora que  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ :

$$\vec{r}_{1*} + \vec{r}_{2*} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Por último, aplicamos que  $\vec{r}_{2*} - \vec{r}_{1*} = \vec{r}$  para despejar  $\vec{r}_{1*}$  y  $\vec{r}_{2*}$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{2*} &= \frac{m_1}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_{1*} &= -\frac{m_2}{M} \vec{r} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos la expresión de  $\vec{r}_{2*}$  y  $\vec{r}_{1*}$  en función de  $\vec{r}$ , podemos sustituirla en (4.2) para expresar la energía cinética como función de  $\dot{\vec{R}}$  y  $\dot{\vec{r}}$ :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{(-m_2)^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{(m_2)^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2}_{T_\mu}$$

El lagrangiano del sistema será entonces:

$$L \equiv T - U = T_{CM}(\dot{\vec{R}}) + T_\mu(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}) = L_{CM}(\dot{\vec{R}}) + L_\mu(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}})$$

En esta situación, el lagrangiano del sistema depende explícitamente de seis coordenadas generalizadas (tres por cada vector de posición).

Como  $\vec{R}$  no aparece explícitamente en la expresión del lagrangiano, es una coordenada cíclica y su momento canónico conjugado se conserva:

$$P_R \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 2M\dot{R} = \text{cte} \quad (4.3)$$

Este último resultado implica que, siendo la masa total del sistema  $M$  constante, la velocidad del centro de masas  $\dot{\vec{R}}$  es constante, es decir, el CM tiene un movimiento inercial que queda determinado al fijar las condiciones iniciales  $\{\vec{R}, \dot{\vec{R}}\}$ , por lo que el problema del movimiento de dos cuerpos se reduce al estudio del lagrangiano asociado a la masa reducida del sistema, lo que supone una simplificación respecto al problema inicial, simplificación que es el objetivo del desarrollo que acabamos de hacer.

## 4.2. Elección de coordenadas generalizadas

Llamamos POTENCIALES CENTRALES a aquellos que dependen exclusivamente de la distancia al origen de potencial:  $U = U(r)$ . Los potenciales centrales generan fuerzas centrales.

Definimos el MOMENTO ANGULAR de una partícula respecto de un punto como el producto vectorial de la distancia a ese punto y su momento lineal:

$$\vec{l} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

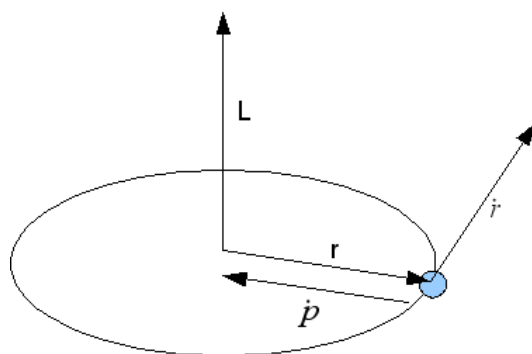


Figura 4.2: vectores asociados al momento angular

Si consideramos una partícula afectada por una fuerza central, derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\vec{l}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = 0$$

ya que  $\dot{\vec{r}}$  es paralelo a  $\vec{p}$  y  $\vec{r}$  a  $\dot{\vec{p}}$ . Este resultado implica que el vector  $\vec{l}$  es constante, y por lo tanto el movimiento está confinado en un plano y el sentido de giro no cambia (ver figura 4.2).

Al quedar el movimiento confinado en un plano, podemos reducir los tres grados de libertad que implicaba el lagrangiano asociado a la masa reducida (que de ahora en adelante denominaremos el lagrangiano del sistema) a dos, siempre y cuando tratemos con fuerzas centrales. Como coordenadas generalizadas elegimos  $r$  y  $\varphi$ , quedando el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (4.4)$$

**Ejemplo 4.1.** Dos partículas de masa  $m$ , unidas mediante un muelle de constante elástica  $k$  y longitud natural despreciable, giran con velocidad angular constante  $\omega$  con respecto a un eje vertical que pasa por el centro de masas del sistema. Las partículas se mueven sobre un plano horizontal sin rozamiento. Determine:

(a) el lagrangiano del sistema y las correspondientes ecuaciones de Lagrange.

(b) la integral de Jacobi.

(a) Utilizamos la ley de Hooke para obtener la expresión de la energía potencial

$$F = -kr \quad \Rightarrow \quad U(r) = \int Fdr = \frac{1}{2}kr^2 + U(0)$$

Si aplicamos la condición de contorno  $U(0) = 0$ :

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Teniendo en cuenta que las dos partículas tienen la misma masa  $m$ , la masa reducida del sistema viene dada por:

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

Ya que el sistema se mueve en un plano, elegimos como coordenadas generalizadas las polares planas,  $\{r, \varphi\}$ . El lagrangiano del sistema (4.4) queda como:

$$L = \frac{m}{4}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}kr^2$$

Dado que  $\dot{\varphi} = \omega$  se mantiene constante, tomando  $\varphi(0) \equiv 0$ :  $\varphi = \omega t$ .

Planteamos ahora la ecuación de Lagrange para  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\ddot{r} - \left( \frac{m}{2}\omega^2 r - kr \right) = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \ddot{r} + \left( \frac{2k}{m} - \omega^2 \right) r &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial describe tres tipos de movimiento diferentes según el término entre paréntesis sea mayor, menor o igual que cero.

Para el caso en el que es mayor que cero, denotando como  $\Omega^2$  a la expresión entre paréntesis:

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = 0$$

la ecuación diferencial representa un MAS en la coordenada  $r$ , de solución:

$$r(t) = r_o \text{sen}(\Omega t + \phi)$$

El significado físico es que este sistema de dos partículas es equivalente al de una sola partícula de masa  $\mu$  en el CM del sistema describiendo un MAS.

Para el caso en el que es igual a cero, la expresión de la ecuación diferencial queda como:

$$\ddot{r} = 0$$

cuya solución corresponde a un movimiento inercial en la coordenada  $r$ :

$$r(t) = c_1 + c_2 t$$

Para el caso en el que es menor que cero, escribimos la ecuación diferencial en la forma:

$$\ddot{r} - \left( \frac{2k}{m} - \omega^2 \right) r = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - \Omega^2 r = 0$$

que tiene solución de tipo hiperbólico:

$$r(t) = r_o \text{senh}(\Omega t + \phi)$$

En definitiva, el movimiento de este sistema de dos partículas queda determinado por el balance entre la energía potencial elástica del muelle y la cinética de rotación.

**(b)** Como el lagrangiano del sistema no depende explícitamente del tiempo, la integral de Jacobi se mantiene constante. Como las ecuaciones de transformación a coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo ni la energía potencial de las velocidades generalizadas, la integral de Jacobi es igual a la energía mecánica total (cf. sección 3.3. En consecuencia, la integral de Jacobi coincide con la energía mecánica del sistema y se mantiene constante a lo largo del tiempo.

$$h = E \equiv T + U = \frac{m}{4}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}kr^2$$

## 4.3. Simetrías del lagrangiano del sistema

### 4.3.1. Simetría respecto de $\varphi$

Volvamos a la expresión del lagrangiano del sistema (4.4):

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

#### 4 Potenciales centrales

nos muestra que la coordenada  $\varphi$  es cíclica, por lo que el momento canónico conjugado se mantiene constante a lo largo del tiempo:

$$P_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = l = \text{cte}$$

Lo que nos permite obtener la expresión de  $\dot{\varphi}$  en función del tiempo:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{\mu r^2(t)} \quad (4.5)$$

Finalmente, integrando entre  $t_0 = 0$  y  $t_1$ :

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu} \int_0^{t_1} \frac{dt}{r^2(t)}} \quad (4.6)$$

Es importante señalar que esta simetría se da gracias a que el potencial gravitatorio  $U(r)$  es central, de manera que el campo de fuerzas que genera es invariante bajo rotación. A modo de ilustración, imaginemos un potencial dependiente de  $\varphi$ :

$$U = -\gamma \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

Sustituímos en (4.4):

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

Como podemos observar, la coordenada  $\varphi$  sí aparece explícitamente en el lagrangiano, por lo que no es cíclica y su momento canónico conjugado (el momento angular) no se conserva.

Sin embargo, sí que existe simetría temporal, lo que unido a la independencia de la transformación de coordenadas del tiempo y de la energía potencial de la velocidad generalizada, implica que la energía mecánica se conserva.

#### 4.3.2. Simetría respecto de $t$

Al no ser ni el lagrangiano ni las ecuaciones de transformación de coordenadas función explícita del tiempo, la integral de Jacobi, que coincide con energía mecánica del sistema, se conserva:

$$h = E \equiv T + U = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} \mu \left( \dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right) + U(r)$$

donde hemos sustituido  $\dot{\varphi}$  por su expresión en (4.5). Despejando  $\dot{r}^2$ :

$$\dot{r}^2 \equiv \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)$$

Finalmente, despejando  $dt$  e integrando, obtenemos:

$$t(r) = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (4.7)$$

**Ejemplo 4.2.** Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  se encuentran inicialmente en reposo, separadas por una distancia  $r_0$ , y bajo la acción de sus mutuas atracciones gravitatorias. Determinar el tiempo que tardan en colisionar.

La energía mecánica y el momento angular se mantienen constantes a lo largo del tiempo, dado que  $U = U(r)$ :

$$E = E_0 = T_0 + U_0 = 0 - G \frac{m_1 m_2}{r_0} = -\frac{\gamma}{r_0}$$

$$l = l_0 = r_0 \mu v_0 \sin \alpha = 0$$

Planteamos la ecuación (4.7):

$$t = \pm \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\mu} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}} = \pm \left( \frac{\mu}{2\gamma} \right)^{1/2} \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0 - r}{r r_0}}} = \pm \left( \frac{\mu r_0}{2\gamma} \right)^{1/2} \int_{r_0}^0 \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} dr$$

Para evaluar la integral, realizamos el cambio de variable  $r = r_0 \sin^2 u$ :

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\frac{r_0 \sin^2 u}{r_0 (1 - \sin^2 u)}} r_0 \sin u \cos u du = 2r_0 \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin u}{\cos u} \sin u \cos u du = \\ &= 2r_0 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 u du = 2r_0 \left( \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u \right)_{\pi/2}^0 = -\frac{\pi}{2} r_0 \end{aligned}$$

Sustituimos la integral en la ecuación anterior, eligiendo el signo para que el tiempo resulte positivo y por lo tanto con significado físico:

$$t = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\mu}{2\gamma} \right)^{1/2} r_0^{3/2}$$

Deshaciendo el cambio de variable en  $\gamma$  y sustituyendo la expresión de  $\mu$ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

resulta:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{2G(m_1 + m_2)}} r_0^{3/2}$$

Como podemos comprobar, el cuadrado del tiempo que tardan en colisionar las dos partículas es proporcional al cubo de la distancia inicial que las separan.

**Ejemplo 4.3.** En sus *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Isaac Newton propuso y resolvió el siguiente problema: una partícula de masa  $\mu$  se mueve en un potencial central, de modo que el ángulo  $\alpha$  entre los vectores velocidad y posición es constante.

(a) Probar que el producto  $vr$  del módulo de la velocidad por el radio vector se mantiene constante.

(b) Hallar la energía mecánica total, suponiendo  $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$ .

(c) Hallar las funciones  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  que representan el movimiento.

(a) Como vimos en el apartado 4.3.1, el vector momento angular  $\vec{l}$  de un cuerpo que se mueve bajo la acción de un potencial central  $U(r)$  se mantiene constante, por lo que su módulo también:

$$l = rp \sin \alpha = \mu vr \sin \alpha = cte$$

Pero  $\mu$  y  $\sin \alpha$  son constantes, luego:

$$vr = cte$$

(b) Despejamos  $v$  en la ecuación anterior:

$$v = \frac{l}{\mu r \sin \alpha} = cte$$

Sustituimos  $v$  en la expresión de la energía mecánica del cuerpo:

$$E \equiv T + U = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2 \sin^2 \alpha} + U(r)$$

Dada la condición de contorno  $U(\infty) \equiv 0$ , la energía mecánica  $E$  tiende a cero cuando nos alejamos mucho del origen de potencial. Por lo tanto, dado que la energía mecánica se conserva,  $E \equiv 0$ .

(c) Despejamos  $U(r)$  en la ecuación anterior:

$$U(r) = -\frac{l^2}{2\mu r^2 \sin^2 \alpha}$$

Planteamos la ecuación (4.7):

$$t = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( \frac{l^2}{2\mu r^2} (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) \right)}}$$

Pero  $\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1 = \cotg^2 \alpha$ , luego:

$$t = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\frac{l}{\mu r} \cotg \alpha} = \pm \frac{\mu}{l} \operatorname{tg} \alpha \int_{r_0}^{r_1} r dr = \pm \frac{\mu}{2l} \operatorname{tg} \alpha (r^2 - r_0^2)$$

donde hemos tomado  $r_1 \equiv r$  como límite superior de integración.



Operamos para despejar  $r^2$ :

$$\pm \underbrace{\frac{2l}{\mu} \cotg \alpha t}_{\beta} = r^2 - r_0^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = r_0^2 \pm \beta t$$

Tomamos la raíz cuadrada (positiva, ya que representa una distancia) para hallar:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 \pm \beta t}$$

Si planteamos ahora la ecuación (4.6):

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{l}{\mu} \int_0^{t_1} \frac{dt}{r_0^2 \pm \beta t} = \varphi_0 + \frac{l}{\mu \beta} \log(r_0^2 \pm \beta t)_0^{t_1}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos finalmente:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \text{tg } \alpha \log \left( 1 \pm \frac{\beta t}{r_0^2} \right)^{1/2}$$

#### 4.4. Potencial efectivo

Una vez explotadas tanto las simetrías del lagrangiano respecto de  $\varphi$  y  $t$  como el hecho de que el momento angular se mantiene constante, utilizaremos la ecuación de Lagrange, al igual que en ejercicio 67.

Aplicamos la ecuación de Lagrange a (4.4):

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (4.8)$$

Sustituimos  $\dot{\varphi}$  por su expresión en (4.5). Es importante señalar que esta sustitución es posible debido a que el campo de fuerzas considerado es central.

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

Si tenemos en cuenta ahora que:

$$-\frac{l^2}{\mu r^3} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)$$

La ecuación (4.8) se transforma en:

$$\mu \ddot{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) \right) = 0 \quad (4.9)$$

Al término  $l^2/2\mu r^2$  se le denomina POTENCIAL CENTRÍFUGO, es siempre repulsivo y es responsable, junto con el término del potencial de interacción, de la forma que adoptan las trayectorias planetarias.

A la suma del potencial centrífugo y el potencial de interacción  $U(r)$  se le denomina POTENCIAL EFECTIVO,  $\hat{U}(r)$ , lo que reduce la ecuación anterior a una expresión muy compacta:

$$\boxed{\mu\ddot{r} + \frac{\partial\hat{U}(r)}{\partial r} = 0} \quad (4.10)$$

Cabe destacar la enorme similitud entre esta ecuación y la conocida  $m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U(r)$ . Mientras que la segunda nos indica que un cuerpo sometido a un potencial escalar conservativo se acelera en la dirección y sentido de máxima disminución de potencial, la primera nos indica que, en un sistema de dos cuerpos sometidos al mismo potencial, la aceleración radial de su masa reducida es la de máxima disminución radial de su potencial efectivo. Si el sistema de cuerpos no se encuentra en rotación,  $l = 0$ , y las dos ecuaciones son equivalentes.

Podemos estudiar esta relación utilizando el concepto de potencial generalizado 2.5, una función  $G$  que cumple:

$$\vec{Q} = -\nabla G \quad (4.11)$$

donde  $\vec{Q}$  es la fuerza neta generalizada. En nuestro caso,  $G = \hat{U}$ .

**Ejemplo 4.4.** Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción de la fuerza central  $F = -4kr^3\hat{r}$ , y cuyo potencial se anula en el origen. Determine:

(a) las condiciones iniciales del movimiento para que la trayectoria sea una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen.

(b) la energía mecánica total y el periodo de dicha órbita.

(a) Estableciendo la condición de contorno  $U(0) = 0$ :

$$\hat{U}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = -\int F(r)dr + \frac{l^2}{2\mu r^2} = kr^4 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Derivando respecto de  $r$ :

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial r} = 4kr^3 - \frac{l^2}{\mu r^3}$$

Para que la trayectoria sea una circunferencia, el radio  $r$  de la órbita debe ser constante e igual a  $R$ . Utilizando la ecuación (4.10):

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial\hat{U}(r)}{\partial r} = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\hat{U}(r)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad l = 2r^3\sqrt{k\mu} = 2R^3\sqrt{k\mu}$$

La velocidad lineal inicial, que será constante a lo largo de toda la órbita, viene dada entonces por:

$$v_0 = v = \frac{l}{\mu R} = 2R^2\sqrt{k/\mu}$$

Luego las condiciones iniciales son  $r_o = R$  y  $v_o = 2R^2\sqrt{k/\mu}$ .

(b) La energía mecánica total viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(R) = 3kR^4$$

El periodo de la órbita es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v/R} = \frac{\pi}{R}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

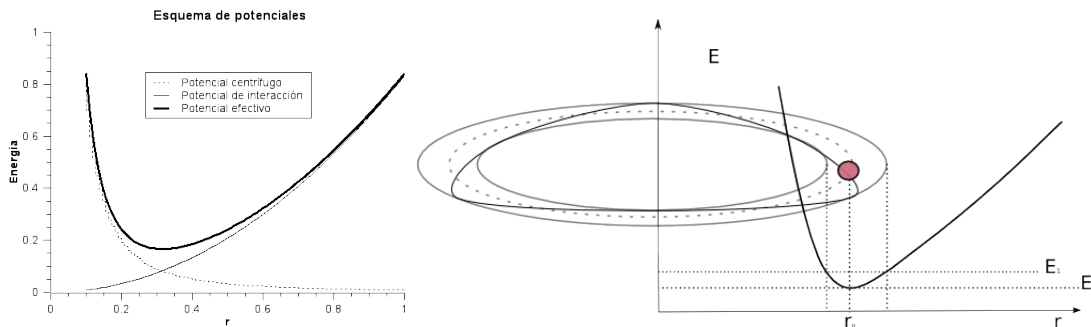
**Ejemplo 4.5.** Una partícula de masa  $m$  se mueve en un potencial armónico  $U = \frac{1}{2}kr^2$ , describiendo una órbita circular de radio  $r_0$ . En un instante determinado se produce una pequeña perturbación en la dirección radial.

(a) Dibuje un diagrama de energía en el que se muestre el potencial efectivo del sistema y la representación gráfica del proceso descrito.

(b) Determine el valor de  $r_0$  en función de  $m, k$  y el momento angular  $l$ .

(c) Determine la frecuencia angular  $\omega$  de las oscilaciones radiales.

(a)



En el diagrama de la derecha, la órbita circular inicial es la de trazo a rayas, y la de trazo relleno la que adquiere la partícula tras la perturbación

A pesar de que puede parecer a simple vista que el diagrama de la órbita no está bien dibujado, no es el caso, pues se puede demostrar que la órbita ha de tener forma convexa (vista desde fuera) en todo momento. Para fundamentación detallada se puede consultar [12].

(b) Al igual que en el ejemplo anterior, comenzamos calculando el potencial efectivo  $\hat{U}$  y su derivada parcial respecto a  $r$ :

$$\hat{U} = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{U}}{\partial r} = -\frac{l^2}{mr^3} + kr$$

Como la trayectoria es circular,  $r = r_0 = \text{cte}$  y  $\ddot{r} = 0$ . Sustituyendo la parcial de  $\hat{U}$  en (4.10):

$$-\frac{l^2}{mr_0^3} + kr_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0^4 = \frac{l^2}{mk}$$

Por lo que la coordenada radial inicial es:

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{l^2}{mk}}$$

(c) La frecuencia angular de las oscilaciones radiales viene dada por la ecuación

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}} = \sqrt{k/m}$$

## 4.5. Ecuación de las órbitas de Binet

Ya hemos visto cómo podemos hallar la ecuación de una trayectoria, pero aplicar estas ecuaciones implica pasos matemáticos, como resolver la integral (4.6) o invertir (4.7), con una solución complicada o incluso imposible de obtener por medios analíticos. Por ello, se hace necesaria una ecuación que nos permita obtener la trayectoria eludiendo estos problemas.

Si utilizamos la regla de la cadena,  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$ :

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt}$$

Desde (4.5),  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$ , luego:

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)$$

Sustituyendo  $\ddot{r}$  en (4.10):

$$\mu \ddot{r} + \frac{\partial \hat{U}(r)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l^2}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

Definimos  $u \equiv 1/r$  y desarrollamos las derivadas:

$$\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d}{d\varphi} \left( u^2 \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{\mu} u^3 + \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Pero  $\partial r / \partial u = -u^{-2}$ , luego:

$$-\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d}{d\varphi} \left( u^2 u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{\mu} u^3 - u^2 \frac{\partial U}{\partial u} = 0$$

Dividimos entre  $u^2$  y agrupamos:

$$\frac{l^2}{\mu} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) + \frac{\partial U}{\partial u} = 0$$

Finalmente despejamos para obtener:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{\partial U}{\partial u}} \quad (4.12)$$

A esta última ecuación se la conoce como ECUACIÓN DE BINET.

**Ejemplo 4.6.** Determinar el potencial  $U(r)$  y la fuerza central derivada  $\vec{F}(r)$  de una partícula de masa  $\mu$  que se mueve siguiendo una curva de Cotes de ecuación  $r = \sec(\alpha\varphi)$ , donde  $\alpha \equiv \sqrt{1 + \frac{\mu k}{l^2}}$ .

En primer lugar, calculamos la derivada segunda de  $u$  respecto de  $\varphi$ :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \cos(\alpha\varphi) = -\alpha^2 \cos(\alpha\varphi) = -\alpha^2 u$$

Sustituimos en (4.12), teniendo en cuenta que como  $U$  sólo depende de  $r$ , la derivada parcial se convierte en total:

$$-\alpha^2 u + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{dU}{du} \Rightarrow dU = -\frac{l^2}{\mu} (1 - \alpha^2) u du$$

Integramos entre  $u$  y  $u = 0$  ( $r = \infty$ ), con la condición de contorno  $U(0) = 0$ :

$$U(u) = -\frac{l^2}{\mu} (1 - \alpha^2) \left[ \frac{u^2}{2} \right]_u^0 = \frac{l^2}{\mu} (1 - \alpha^2) \frac{u^2}{2}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$U(r) = \frac{l^2}{\mu} (1 - \alpha^2) \frac{r^{-2}}{2} = \frac{k}{r^2}$$

La fuerza  $F(r)$  es entonces:

$$F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{l^2}{\mu} (1 - \alpha^2) r^{-3} = -\frac{2k}{r^3}$$

Es decir, para que los planetas siguieran órbitas como la espiral de Cotes sería necesario un potencial proporcional a la inversa de la distancia al cuadrado.

A pesar de lo extraño que puede parecer un potencial de este tipo, se puede demostrar que un potencial gravitatorio que estuviese compuesto de dos términos de la forma

$$U(r) = \frac{k}{r} - \frac{C}{r^2}$$

da lugar a una órbita de ecuación:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos \alpha\theta}{a(1 - \epsilon^2)}$$

que para  $\alpha \neq 1$  es una elipse con precesión, que explicaría el movimiento de precesión de la órbita de Mercurio.

Se puede encontrar un estudio pedagógico de el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula que describe una órbita de una rosa de cuatro pétalos, donde se ponen de manifiesto la potencia de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana para describir la dinámica del sistema y se ilustra la interpretación física de los diagramas de energía y mapas de fase en [13].

**Ejemplo 4.7.** Un cuerpo puntual es lanzado con velocidad  $v = \sqrt{2\mu/3a^3}$  perpendicularmente al radio vector y a una distancia  $a$  desde el centro de una fuerza atractiva  $F = \mu^2 r^{-4}$ . Hallar la trayectoria y mostrar que pasa por el origen en un tiempo  $\tau = 3\pi\sqrt{3a^5}/(8\sqrt{2\mu})$

Vamos a seguir dos caminos para intentar resolver este problema. En primer lugar utilizaremos la ecuación (4.7) y en segundo lugar la ecuación de Binet (4.12).

Para poder emplear (4.7) necesitamos la energía  $E$  del cuerpo, que como estamos en un campo conservativo será constante y la podemos determinar en función de las condiciones iniciales, la energía potencial  $U(r)$ , que determinaremos a partir de la expresión de la fuerza  $F$ , y el término en  $l^2$ , que determinaremos también por medio de las condiciones iniciales, ya que  $\vec{l}$  es constante (ver sección 4.2).

Así que, la energía potencial es, estableciendo la condición de contorno  $U(\infty) \equiv 0$ :

$$U(r) = - \int_{\infty}^r F(r) dr = - \frac{\mu^2}{3r^3}$$

La energía total  $E$  será:

$$E \equiv E_c(v_0) + U(a) = \frac{1}{2}\mu \frac{2\mu}{3a^3} - \frac{\mu^2}{3a^3} = 0$$

Y el término en  $l^2$ :

$$l \equiv a\mu v_0 = a\mu \sqrt{\frac{2\mu}{3a}} \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu^2}{3ar^2}$$

Sustituimos en (4.7):

$$t(r) = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} = \pm \int_a^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( \frac{\mu^2}{3r^3} - \frac{\mu^2}{3ar^2} \right)}} = \sqrt{\frac{3a}{2\mu}} \int_a^{r_1} r \sqrt{\frac{r}{a-r}} dr$$

Si hacemos el cambio de variable  $r \equiv a \sin^2 u$ :

$$t = \sqrt{\frac{3a}{2\mu}} \int_{\pi/2}^{u_1} 2a^2 \sin^4 u \, du = \sqrt{\frac{3a}{2\mu}} \frac{a^2}{2} \left[ \frac{3u}{2} - \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8} \right]_{\pi/2}^{u_1}$$

Si ahora deshacemos el cambio de variable:

$$u = \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}}$$

$$\text{sen } 2u = 2 \text{sen } u \cos u = 2 \sqrt{\frac{r}{a}} \sqrt{\frac{a-r}{a}} = \frac{2}{a} \sqrt{r(a-r)}$$

$$\text{sen } 4u = 2 \text{sen } 2u \cos 2u = 4 \text{sen } u \cos u (\cos^2 u - \text{sen}^2 u) = \frac{4}{a} \sqrt{r(a-r)} \left(1 - \frac{2r}{a}\right)$$

y aplicamos la regla de Barrow, resulta finalmente:

$$t = \pm \sqrt{\frac{3a}{8\mu}} \frac{a^2}{2} \left[ 3 \left( \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{a}} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{a^2} (2r_1 + 3a) \sqrt{r_1(a-r_1)} \right]$$

De modo que, a pesar de que hemos podido resolver la integral y expresarla en términos de funciones analíticas, no podemos invertir esta función  $t(r)$  para obtener  $r(t)$ , tal y como señalamos en la sección 4.5.

Si evaluamos  $t$  en  $r_1 = 0$ , podemos comprobar que se cumple:

$$t = \tau = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{3a^5}{2\mu}}$$

Como hemos visto que no podemos invertir  $t(r)$  para solucionar nuestro problema, probaremos ahora a seguir el segundo camino anunciado, utilizando la ecuación de Binet:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{\partial U}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3a}{2} u^2$$

una ecuación diferencial que tiene como solución:

$$u = \frac{2/a}{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{a} \sec^2 \frac{\varphi}{2}$$

como  $u = 1/r$ :

$$r(\varphi) = \frac{a}{2} (1 + \cos \varphi) = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

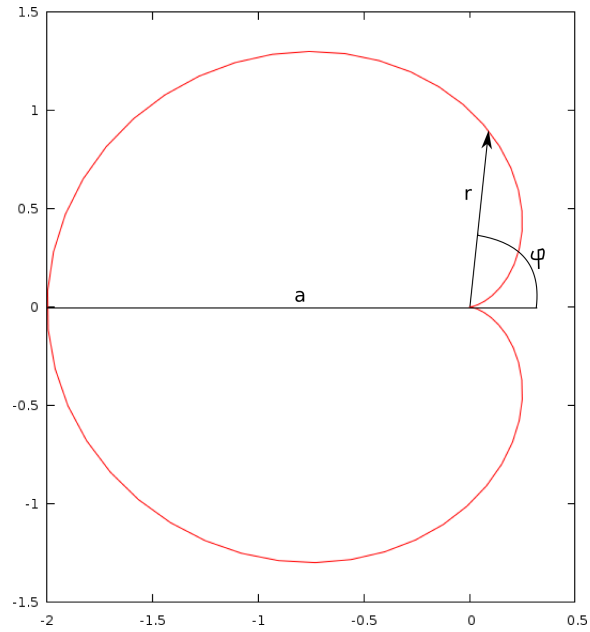
que es la ecuación de una cardioide, un caso particular del Caracol de Pascal. Se puede encontrar más información sobre esta curva en [14] y en [15].

Para calcular el tiempo empleado por el cuerpo en caer, nos valdremos del concepto de velocidad areolar, cuya definición podemos encontrar en cualquier libro de Física General, por ejemplo, [16]):

$$v_a \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

como  $l$  y  $\mu$  son constantes,  $v_a$  también será constante:

$$\int_0^A dA = \frac{l}{2\mu} \int_0^\tau dt \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{A\mu}{2l}$$



**Figura 4.3:** cardiode con  $a=2$

donde podemos calcular el área  $A$  fácilmente a partir de fórmulas presentes en alguna tabla de integrales, como la que podemos encontrar en las últimas páginas de [17]:

$$A = \int_0^\pi r \, r d\varphi = a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{3\pi a^2}{16}$$

finalmente:

$$\tau = \frac{A\mu}{2l} = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{3a^5}{2\mu}}$$



# Bibliografía

- [1] Leibniz, G. W. and Clarke, Samuel. Leibniz-clarke correspondence. Disponible en <http://www.bun.kyoto-u.ac.jp/~suchii/leibniz-clarke.html>. 1
- [2] Mach, Ernst. *Science of Mechanics*. 1919. Disponible en <http://www.archive.org/details/scienceofmechani005860mbp>. 1.0.1
- [3] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Diccionario esencial de las ciencias*. Espasa, 2nd edition, 2002. 1.1
- [4] D'Alembert, Jean Le Rond. *Discurso preliminar de la enciclopedia*. R. B. A. Proyectos Editoriales, 1984. 1.1
- [5] Annequin, R. and Boutigny, J. *Mecánica 1*. Editorial Reverté, 1978. 1.2
- [6] Spiegel, Murray R. *Mecánica Teórica, teoría y problemas*. Schaumm. 1.3.5
- [7] Niven, Larry. *Ringworld*. 1970. 1.3.6
- [8] Antonio Rañada. *Dinámica clásica*. Alianza Editorial, 1994. 2.19, 4.1
- [9] Cuerno R., Rañada A.F. y Ruiz-Lorenzo J.J. Deterministic chaos in the elastic pendulum: A simple laboratory for nonlinear dynamics. *American Journal of Physics*, 60(1):73, 1992. 2.3
- [10] Hebert Goldstein, Charles P. Poole and John L. Safko. *Classical Mechanics*. 3rd edition. 2.4, 2.7
- [11] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba. *Vector Calculus*. W.H. Freeman & Company, 4th edition, April 1996. 3.7
- [12] Charles P. Poole Jr., John L. Safko and Horacio A. Farach. Orbits of central force law potentials'. *American Journal of Physics*, 73(1), January 2005. 4.5
- [13] César Vicente Molina y Enrique Maciá Barber. Relato de otros mundos. *Revista Española de Física*, Octubre-Diciembre 2004. 4.5
- [14] Murray R. Spiegel, John Liu y Lorenzo Abellanas. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw Hill, 2<sup>a</sup> edition. 4.7
- [15] MathWorld— A Wolfram Web Resource. Cardioid. <http://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html>. 4.7

## BIBLIOGRAFÍA

- [16] S. Burbano de Ercilla, E. Burbano García, C. Gracia Muñoz. *Física General*. Ed. Tébar, 23<sup>a</sup> edition. [4.7](#)
- [17] Salas, Hille y Etgen. *Calculus, una y varias variables*, volume 2. Editorial Reverte. [4.7](#)
- [18] Lanczos, Cornelius . *The variational principles of mechanics*. University of Bangalore press, 1997.
- [19] Landau and Lifchitz. *Curso abreviado de física teórica*, volume 1: Mecánica y electrodinámica. Editorial MIR MOSCÚ, 1982.
- [20] Feynman, Richard P., Leyghton, Robert B., and Sands, Matthew. *Física*, volume 1: Mecánica, radiación y calor. Addison Wesley Iberoamericana, 1998.
- [21] Gantmájér, F. R. . *Mecánica analítica*. Editorial URSS, 1996.
- [22] Goldstein. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, 2000.
- [23] Webster, A. G. *The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*. Leipzig, 1998.
- [24] Gerald F. Wheeler and William P. Crummet. The vibrating string controversy. *American Journal of Physics*, 1987.

# Historia del documento y cambios propuestos

## Versiones y cambios

### 0.10.1 - 17 de julio de 2009

- Corregidos y actualizados los datos del autor Álvaro Hacar González. – ISP.
- Corregidas diversas erratas en la sección de los multiplicadores de Lagrange. – EMB e ISP.
- Eliminada una figura perdida del capítulo de mecánica newtoniana. – PGC e ISP.

### 0.10.0 - 9 de julio de 2009

- Corrección de más erratas. –EMB e ISP.
- Añadida una referencia al Diccionario esencial de las ciencias. – EMB.
- Reestructurada ligeramente la explicación del desarrollo del problema de los dos cuerpos y el cambio al sistema del centro de masas, para evitar confusión con el número de coordenadas generalizadas. – ISP y EMB.
- Corregida la URL del documento al arreglar un bug del sistema de plantillas. – ISP.
- Cambiado el estilo de la bibliografía a `ünst`, que utiliza números en las citas, ya que el estilo `.alpha` utilizaba el nombre de pila de los autores de los libros, lo que, a juicio del editor, no parece adecuado. – ISP.
- Añadida una referencia a un `changeset` del repositorio hg de este documento a un elemento de la lista de cosas por hacer para facilitar la colaboración futura. – ISP.

### 0.9.0 - 2 de julio de 2009

- Corrección de numerosas erratas y problemas de maquetación en los capítulos de Mecánica Lagrangiana y Simetrías. – ISP y EMB.
- Retocadas y añadidas algunas figuras. – ISP.

### 0.8.0 - 20 de noviembre de 2008

- Se agrega un primer tema de repaso de mecánica newtoniana. – PGC.
- Comienzo de una revisión y ampliación del documento completo.

### 0.7.2 - 22 de enero de 2008

- Se arregla la orientación de los dos puntos sobre muchas variables – ISP.
- Se corrigen algunas erratas – EMB e ISP.
- Se elimina la segunda parte del ejercicio 2.11, por tener una solución incorrecta – EMB.

#### **0.7.1 - 23 de diciembre de 2007**

- Se incluyen y se comentan algunas referencias bibliográficas. – ISP.
- Se incluye un índice al principio del libro. – ISP.
- Corrección de erratas de rigor. – EMB e ISP.

#### **0.7.0 - 1 de diciembre de 2007**

- Se añade el capítulo sobre leyes de conservación, escrito por FRP. – ISP
- Se corrigen algunos problemas tipográficos. – ISP.

#### **0.6.0 - 20 de octubre de 2007**

- Primera versión pública – ISP, ÁH y EMB.
- Agradecemos la revisión del capítulo sobre a potenciales centrales a Elena Manjavacas Martínez.

## **Cambios propuestos**

Los autores y editores proponen las siguientes modificaciones:

- Escribir una introducción.
- Reescribir o mejorar la sección referente al problema de los dos cuerpos, para que aparezcan los conceptos de manera natural.
- Mejorar la explicación de la técnica de los multiplicadores de Lagrange aplicada a la obtención de las fuerzas de ligadura.
- Reincorporar la segunda parte del ejercicio 3.11 con la solución corregida. Véase el changeset 8:b1ce4b9451b0 en el repositorio de hg del documento.
- Relacionar los capítulos entre sí, por medio de más comentarios y referencias cruzadas.
- Incorporar más figuras para ilustrar las explicaciones y los ejemplos.
- Repensar el título del libro, por el capítulo inicial de mecánica newtoniana.

# Manifiesto de Alqua

## Origen y metas del proyecto

En 1999 fundamos el proyecto Alqua con el objetivo de promover la creación de un fondo de documentos libres de carácter científico que permita a cualquiera aprender con libertad.

Al constatar la duplicación de esfuerzos en la preparación de materiales didácticos para la física y con el deseo de compartir nuestros conocimientos, nos inspiramos en los principios de libertad que rigen el movimiento del software libre para establecer aquéllos de Alqua. Primero pensamos que lo que escribiésemos debería poder disfrutarse sin merma de libertad por las personas interesadas, y más tarde decidimos organizar nuestros esfuerzos para ayudar a otras personas que compartían nuestra visión a difundir sus saberes mediante un esfuerzo cooperativo.

Para hacer efectivos dichos principios decidimos que los documentos publicados deben ser libres en un sentido amplio: pueden reproducirse y distribuirse (gratuitamente o no, es irrelevante) pero también pueden modificarse y usarse como base para otros trabajos. A fin de evitar que estas libertades del lector-autor se restrinjan posteriormente, los documentos contienen una licencia que explica los derechos que posee y estipula que nadie que distribuya el documento, modificado o no, puede hacerlo de modo no libre.

## Las ventajas de los documentos libres

Actualmente es ilegal compartir o modificar la mayoría del conocimiento científico en fuentes impresas, que suelen ser inaccesibles para la mayoría de los estudiantes y bibliotecas del mundo en virtud de su precio y se actualizan con poca frecuencia debido a su sistema de distribución tradicional.

En este contexto los documentos libres presentan ciertas ventajas.

Por una parte, en algunas disciplinas los documentos libres permiten facilitar el establecimiento de un sistema de mérito reduciendo las barreras de precio y disponibilidad. El modelo de desarrollo libre para la ciencia se apoya sobre las libertades de distribución y modificación. Éstas se ven favorecidas por el medio digital, así como por la concepción del conocimiento como un patrimonio comunitario. Todo lo anterior permite reducir el coste del documento a una cantidad marginal y anima a que lo mejor se combine con lo mejor para producir un resultado excelente a la vez que actualizado.

Por otra parte, en casos donde la evaluación del mérito es más subjetiva, los documentos libres pueden aportar una base sobre la que elaborar con un menor esfuerzo diferentes perspectivas doctrinales o estéticas, mutaciones, iteraciones y apuestas que incentivan la

creación como un aspecto más del disfrute de la obra.

En suma, los documentos libres fomentan un acceso a la cultura más justo y completo. Para algunos dominios del conocimiento científico el proceso de desarrollo libre facilita la recombinación, lo que permite la producción de obras muy sofisticadas y completas mientras que en otros ámbitos facilita la difusión de perspectivas plurales y la experimentación creativa.

## Una nueva dinámica de creación y aprendizaje

Algunas personas que hemos conocido están interesadas por este modelo de colaboración, pero se preguntan qué clase de control tienen sobre sus documentos libres. La respuesta es sencilla: la licencia está diseñada de modo que a cada cual se le atribuya aquello de lo que es responsable y nada más. Para ello, se incluye en el documento una sección en la que se explica quién hizo qué y cuándo lo hizo.

Uno de los efectos más interesantes de introducir los documentos libres en el aula es que difuminan la frontera entre quien aprende y quien enseña. Los documentos libres son un puente para establecer contacto con una comunidad de interés mucho más vasta que la del centro educativo, permitiendo el aprendizaje continuo y fomentando una experiencia plural y transformadora: el criterio para participar en un documento es, solamente, hacerlo bien.

Un autor puede pensar que distribuir su documento bajo un copyright que restringe la libertad de copia es *más rentable* que otorgar mayores libertades. Esto no es necesariamente así, por varias razones.

En primer lugar, libre no quiere decir gratuito. Una editorial puede publicar un documento libre obteniendo beneficio de ello. De hecho, es una buena idea hacerlo dado lo agradable que resulta manejar un libro bien encuadernado. También los autores pueden aceptar una compensación de los lectores por su trabajo en un determinado documento.

En segundo lugar, la mayor parte de los autores son primeramente lectores. Cabe esperar, pues, que para la mayoría el enorme ahorro derivado del acceso a *muchos* documentos libres supere holgadamente el beneficio económico obtenido de *unos pocos* documentos no libres. La experiencia del software libre lo avala.

Finalmente, no se puede poner precio al beneficio social derivado de la existencia de documentos libres. Gracias a los derechos que uno posee sobre un documento libre puede adaptarlo para un curso académico eliminando lo que no es pertinente o es demasiado avanzado y complementando el tema con nuevas aportaciones, desde ejercicios o diagramas hasta apartados enteros.

Pensamos que las universidades u otras instituciones educativas podrían cumplir mejor su función social poniendo a disposición de la sociedad que las financia, en condiciones de libertad, su patrimonio más importante: el conocimiento.

El modelo de cooperación que proponemos (que anima al trabajo en equipo aunque no lo impone) permite abrir todas estas perspectivas y algunas más. Alqua intenta ofrecer los medios para esta tarea y relacionar, a través de los documentos libres, a los que tienen saberes que comunicar y a los que sienten curiosidad por dichos saberes.

## Conclusión

Alqua tiene una tarea muy ilusionante y tan ambiciosa que sólo es factible en comunidad. Por ello, pedimos a las personas que forman parte de instituciones o empresas que colaboren con Alqua para que éstas apoyen económicamente el proyecto o patrocinen ediciones impresas y donaciones a las bibliotecas públicas. Ciertamente, los medios materiales son necesarios, pero inútiles si, a nivel particular, no contamos con tu participación como individuo, aprendiendo y enseñando, para que los documentos libres en marcha y otros nuevos alcancen los altos niveles de calidad a los que aspiramos.

Te invitamos a construir un patrimonio científico que nos pertenezca a todos.

---

© Álvaro Tejero Cantero y Pablo Ruiz Múzquiz, 2003.

Este *Manifiesto de Alqua* está bajo una licencia *atribución-sin derivados* de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia escriba una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA o visite [http://creativecommons.org/licenses/by\\_nd/3.0/es/legalcode.es](http://creativecommons.org/licenses/by_nd/3.0/es/legalcode.es)

Versión 2.0, marzo de 2003 - <http://alqua.org/alqua/manifiesto-es.html>





# El proyecto libros abiertos de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el [manifiesto de Alqua](#) y las [directrices para documentos libres de Alqua](#). Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.)

## Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.
- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.
- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.

- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

## ¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

## ¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, [alqua.org](http://alqua.org)

2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.
3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.
4. Si puedes, adjuntar al archivador una copia del [CD-ROM de documentos libres de Alqua](#).
5. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a [librosabiertos@alqua.org](mailto:librosabiertos@alqua.org).

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

## En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el [manifiesto de Alqua](#), persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

---

© Álvaro Tejero Cantero, 2003.

Esta descripción del *proyecto Libros Abiertos* está bajo una licencia *atribución-sin derivados* de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia escriba una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA o visite [http://creativecommons.org/licenses/by\\_nd/3.0/es/legalcode.es](http://creativecommons.org/licenses/by_nd/3.0/es/legalcode.es).

Versión 1.0, 2003 - [http://alqua.org/alqua/open\\_books-es.html](http://alqua.org/alqua/open_books-es.html)

LAG	MECÁNICA LAGRANGIANA	531.5	ALQ
-----	----------------------	-------	-----

† lomo para ediciones impresas



# Mecánica lagrangiana

*Teoría y práctica*

Álvaro Hacar González, Fabio Revuelta Peña, Israel Saeta Pérez, Pablo M. García Corzo y Enrique Maciá Barber

Una introducción a la mecánica lagrangiana y su aplicación en el estudio de potenciales centrales. Contiene ejercicios resueltos.

requisitos

Conocimientos básicos de Cálculo diferencial y vectorial de primero de carrera.

en internet <http://alqua.org/libredoc/LAG>

## otros documentos libres

Variedades, tensores y física - Óptica electromagnética - Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción a la física cuántica, segunda parte - Redes y sistemas - Sistemas Operativos - Geometría simpléctica - Física del láser - Phystones.

<http://alqua.org/libredoc/>

alqua, **madeincommunity**